

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Физический факультет

Международная межправительственная организация
ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория ядерных проблем имени В.П. Дзелепова

Кафедра радиофизики и радиоэлектроники
Заведующий кафедрой, профессор
Сажин В.И. _____
Кафедра теоретической физики
И.о. заведующего кафедрой, профессор
Коренблит С.Э. _____

Дипломная работа

Нейтринные осцилляции в веществе и возможность
исследования декогеренции в солнечных экспериментах

Руководители:
_____ к.ф.-м.н. Наумов Д.В. (ОИЯИ)
_____ профессор Валл А.Н. (ИГУ)
Студент группы 01521-Д
_____ Тресков К.А.

Работа защищена
с оценкой _____
«_____» _____ 2015 г.

Рецензент:
С.н.с, ИДСТУ, к.ф.-м.н
Ломов В.П. _____

Протокол № _____
Нормоконтролер:
_____ Перевалова И.А.

Дубна-Иркутск 2015

Задание по подготовке дипломной работы студенту

Трескову Константину Андреевичу

1. Тема работы: “Нейтринные осцилляции в веществе и возможность исследования декогеренции в солнечных экспериментах”
утверждена приказом по университету № _____ от _____.
2. Срок подачи работы: _____.
3. Исходные данные к работе: теоретический материал прослушанных лекций, литература по теме дипломной работы: тексты диссертаций, публикации в российских и зарубежных изданиях.
4. Краткое содержание дипломной работы:
 - 1) Введение в нейтринную физику
 - 2) Нейтринные осцилляции в подходе с плоскими волнами.
 - 3) Нейтринные осцилляции в подходе с волновыми пакетами.
 - 4) Нейтринные осцилляции с волновыми пакетами в веществе.
5. Перечень графического материала: рисунков - **9**, таблиц - **3**.
6. Консультанты по работе с указанием относящихся к ним разделов: нет.
7. Дата выдачи задания: _____.
8. Кафедра теоретической физики
И.о. зав. кафедрой, профессор _____ С.Э. Коренблит.
9. Руководители работы:
Зам. директора, ЛЯП ОИЯИ _____ к.ф.-м.н. Д.В. Наумов
профессор _____ д.ф.-м.н. А.Н. Валл
задание принял к исполнению: _____ К.А. Тресков.
10. Промежуточный контроль за выполнением работы: _____.

Реферат

В данной работе рассмотрена квантовомеханическая теория нейтринных осцилляций в вакууме и веществе. Рассмотрена стандартная плосковолновая теория осцилляций и её внутренние противоречия. Рассмотрена последовательная квантовомеханическая теория осцилляций в вакууме, использующая волновые пакеты для описания локализованных состояний нейтрино. Дан обзор различных теоретических оценок ширины нейтринного волнового пакета в импульсном пространстве. На базе плосковолновой теории с использованием адиабатического приближения, развита теория нейтринных осцилляций в веществе с переменной плотностью, подходящая для описания солнечных экспериментов. В рамках этого подхода изучена возможность постановки экспериментальных ограничений на ширины волновых пакетов по данным солнечных экспериментов и показано, она значительно ослабляется эффектами усреднения.

Содержание

1	Введение в нейтринную физику	6
1.1	Введение в нейтринную физику	6
1.2	Солнечные нейтрино	11
1.3	Гео-нейтрино	14
1.4	Реакторные нейтрино	15
1.5	Атмосферные нейтрино	15
1.6	Ускорительные нейтрино	16
2	Нейтринные осцилляции в подходе с плоскими волнами	17
2.1	Нейтринный осцилляции в вакууме	17
2.2	Нейтринные осцилляции в веществе	19
2.3	Чем плох подход с плоскими волнами?	28
3	Нейтринные осцилляции в подходе с волновыми пакетами	30
3.1	Осцилляции в вакууме	30
3.2	Теоретические ограничения на импульсные ширины пакетов . .	37
4	Нейтринные осцилляции с волновыми пакетами в веществе	41
4.1	MSW-эффект	41
4.2	Возможность постановки экспериментальных ограничений из солнечных данных	47
A	Асимметрия день-ночь	59

Список иллюстраций

1.1	Энергетические спектры солнечных нейтрино.	13
2.1	$\sin^2 2\tilde{\theta}(r)$ при $E = 8$ МэВ.	23
2.2	$\sin^2 2\tilde{\theta}(E)$ при $r = 0$	23
2.3	Вероятности выживания P_{ee} при энергии $E_\nu = 10$ МэВ в вакууме и в веществе с постоянной плотностью электронов, соответствующей 100 г/см ³	24
2.4	Показатель адиабатичности, соответствующий плотности (2.27) в диапазоне энергий от 1–10 МэВ	27
3.1	Вероятность выживания для $\bar{\nu}_e$ как функция E_ν при фиксированном расстоянии $L = 60$ км для некоторых относительных ширин волнового пакета $\sigma_{\text{rel}} = \sigma_E/E_\nu$	39
4.1	Функции распределения рождения нейтрино.	48
4.2	Экспериментальные измерения вероятностей выживания вместе с теоретическими предсказаниями (LMA).	49
4.3	Зависимость $\left\langle \frac{\partial^2 \cos^2 \tilde{\theta}}{\partial p^2} \right\rangle$ от импульса нейтрино.	49
4.4	Профиль $\Delta\chi^2(\sigma_p)$	50

Список таблиц

1.1	Основные реакции, в которых рождаются нейтрино, полные потоки и максимальная энергия нейтрино	12
2.1	Двух-нейтринные схемы, используемые в анализе разных экспериментов.	19
2.2	Эффективные материальные потенциалы, верхний знак относится к случаю нейтрино, нижний к антинейтрино.	20

Глава 1

Введение в нейтринную физику

1.1 Введение в нейтринную физику

Изучение нейтрино и необходимость объяснения его загадочных свойств в течение десятилетий двигало физику элементарных частиц и приводило к появлению хорошо известных сегодня концепций и теорий. Изучение нейтрино сыграло важную роль в построении и подтверждении Стандартной модели.

Существование новой нейтральной частицы было впервые предположено Вольфгангом Паули для объяснения непрерывного спектра энергий электронов и закона сохранения момента импульса в β -распаде и была названа им “нейтроном”, им же была установлена верхняя граница массы новой частицы в $m_e/500$ по данным от β -распада трития. Но в 1932 году Чедвиком была открыта другая массивная нейтральная частица, которая также была названа нейтроном. Термин *нейтрино* (“маленький нейтрон” с итальянского) был предложен Энрико Ферми в 1933 году для разрешения терминологической путаницы. В 1934 году он публикует статью, посвящённую 4-фермионной теории β -распада.

В следующем году Пайерлс и Бете рассчитали на основании теории Ферми

длину пробега нейтрино в воде и получили, что она равна 1000 световых лет, что говорило о практической невозможности детектирования нейтрино.

В 1946 году Бруно Понтекорво предложил хлор-аргонный метод для детектирования нейтрино [1] и в 1956 было этим методом в эксперименте Рейнса и Коуэна были зарегистрированы антинейтрино от ядерного реактора в Лос-Аламосе [2].

В 1957 году было экспериментально подтверждено нарушение P -чётности в слабых взаимодействиях, что привело к формулировке $V - A$ теории слабого взаимодействия [3], где было впервые предположены, что все поля, участвующие в слабом взаимодействии левые, и заложило путь к Стандартной модели.

Стандартная модель - это теория, объединяющая сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия. Это калибровочная теория, основанная на группе $SU_C(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$. $SU_C(3)$ описывает сильные взаимодействия, кварковые поля q, \bar{q} принадлежат фундаментальному представлению алгебры этой группы, генераторы алгебры могут быть выбраны в виде матриц Гелл-Манна $\frac{\lambda^a}{2}$. $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ отвечает за описание электрослабого взаимодействия, левые поля лептонов объединены в дублеты, лежащие в фундаментальном представлении, по поколениям $L^f = (\nu^f, l^f)$ ($f = e, \mu, \tau$), генераторы для $SU_L(2)$ могут быть выбраны в виде матриц Паули $\frac{\sigma^a}{2}$, а для $U_Y(1)$ это любое комплексное число. Переносчики взаимодействий - калибровочные бозоны, описываются полями в присоединённом представлении соответствующей алгебры. Размерность присоединённого представления для $SU(N)$ равна $N^2 - 1$, отсюда очевидно что существует восемь переносчиков сильного взаимодействия - глюонов, и 4 переносчика электрослабых взаимодействий. Наличие локальной калибровочной инвариантности прямо запрещает калибровочным бозонам иметь массу.

Единственным способом, сохраняющим перенормируемость теории, придать массу калибровочным бозонам и заодно полям материи, кваркам и лептонам - это спонтанное нарушение калибровочной симметрии. Этот механизм в настоящее время известен как механизм Хиггса. Лагранжиан Стандартной

модели имеет вид [4]:

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yakawa}} + \mathcal{L}_{\text{kinetic}}. \quad (1.1)$$

Первый член описывает динамику полей материи, калибровочных полей и их взаимодействие друг с другом:

$$\mathcal{L}_{\text{kinetic}} = \sum_{\text{quarks, leptons}} i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu D_\mu\psi(x) - \frac{1}{4} \sum_{A,W,B} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}. \quad (1.2)$$

Ковариантная производная определена как $D_\mu = \partial_\mu + ig_s A_\mu^a T^a + ig W_\mu^a t^a + ig' B_\mu Y$, где g_s, g, g' калибровочные константы связи. Тензоры напряжённости поля имеют вид $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ для неабелевых полей и $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$ для абелевого поля. Лагранжиан хиггсовского сектора в (1.1) выбирается в виде:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = |D_\mu H|^2 - \frac{\lambda^2}{4} \left(|H|^2 - v^2 \right)^2. \quad (1.3)$$

Само хиггсовское поле в минимальной Стандартной модели выбирается в виде дублета комплексных скалярных полей по $SU_L(2)$

$$H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix}.$$

Данное поле имеет ненулевое вакуумное среднее и используя калибровочную свободу можно перейти к унитарной калибровке, в которой $H^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{v+h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, где мы явно выделили вакуумное среднее v и возбуждение поля относительно него h .

Именно наличие вакуумного среднего приводит к нарушению электрослабой симметрии $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ до $U_{\text{em}}(1)$ и как следствие к появлению трёх массивных калибровочных бозонов:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \pm iW_\mu^2), \quad Z^0 = \cos\theta_W W_\mu^3 - \sin\theta_W B_\mu, \quad (1.4)$$

$$\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (1.5)$$

с массами $m_W = \frac{gv}{2}$, $m_Z = \frac{gv}{2 \cos \theta_W}$. Остаётся одна безмассовая комбинация полей, являющаяся полем фотона.

$$A_\mu = \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W W_\mu^3$$

Придание массы полям материи происходит с помощью юкавского взаимодействия с хиггсовским полем:

$$\mathcal{L}_{\text{Yakawa}} = \sum_{i,j} f_{ij} \bar{\psi}_i H \psi_j + h.c. \quad (1.6)$$

Появляющиеся после спонтанного нарушения симметрии появляющиеся члены вида $f_{ij} \bar{\psi}_i \psi_j$ могли бы быть интерпретированы как массовые члены для фермионных полей, если бы они были диагональны по полям. Для этого можно диагонализировать лагранжиан - перевыбрать базис полей так, чтобы новые поля имели определённую массу. Унитарная матрица, обеспечивающая переход от базиса взаимодействия к базису полей, имеющих определённую массу, называется матрицей смешивания. В кварковом секторе она называется матрицей Кабиббо-Кобаяси-Маскавы (СКМ), а в лептонном секторе SM - матрицей Понтекорво-Маки-Накагавы-Сакаты (PMNS).

Интересно отметить, что изначально матрица смешивания для нейтрино была впервые введена для объяснения малости лептонных распадов гиперонов и небольшой разницы констант Ферми G_F , полученных из изучения распадов мюонов и бета-распада [5].

В общем случае для параметризации унитарной матрицы 3×3 необходимо 9 параметров, пять из которых в случае дираковских нейтрино можно убрать с помощью надлежащего фазового преобразования без изменения наблюдаемых величин. В стандартной параметризации матрица смешивания Понтекорво-Маки-Накагавы-Сакаты (PMNS) имеет вид:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23} & \sin \theta_{23} \\ 0 & -\sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{13} & 0 & \sin \theta_{13} e^{-\delta_{CP}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13} e^{\delta_{CP}} & 0 & \cos \theta_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} & 0 \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P,$$

где $P = \text{diag}(1, e^{i\alpha_{12}/2}, e^{i\alpha_{13}/2})$ - матрица майорановских фаз CP-нарушения, δ_{CP} - дираковская фаза CP-нарушения. Углы смешивания θ_{12} , θ_{23} были определены из различных экспериментов с ускорительными, реакторными, солнечными и атмосферными нейтрино. Последним был определён угол смешивания θ_{13} в эксперименте Daya Bay в 2012 году [6]. Приведём текущие best-fit значения для параметров смешивания и разностей масс [7], определённых из осцилляционных экспериментов, где NH - обозначает нормальную иерархию, IH - обратную иерархию, а ограничение на сумму масс нейтрино получено коллаборацией PLANCK из совместного анализа теплового спектра реликтового излучения и барионных акустических осцилляций [8]:

$$\sin^2 2\theta_{21} = 0.846 \pm 0.021, \quad \Delta m_{21}^2 = (7.53 \pm 0.18) \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2, \quad (1.7)$$

$$\sin^2 2\theta_{23} = 0.999_{-0.018}^{+0.001}, \quad |\Delta m_{23}^2| = (2.44 \pm 0.06) \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2 \text{ (NH)}, \quad (1.8)$$

$$\sin^2 2\theta_{23} = 1.000_{-0.017}^{+0.000}, \quad |\Delta m_{23}^2| = (2.52 \pm 0.07) \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2 \text{ (IH)}, \quad (1.9)$$

$$\sin^2 2\theta_{13} = (9.3 \pm 0.8) \cdot 10^{-2}, \quad \sum_i m_i < 0.23 \text{ эВ}^2. \quad (1.10)$$

Нейтрино сыграли огромную роль в подтверждении Стандартной модели. Так наличие обнаружение реакции $\nu_\mu + N \rightarrow \nu_\mu + N$, идущей через обмен Z-бозоном (нейтральный ток) в 1973 году в эксперименте Gargemelle [9] было первым следом существования Z-бозона. Эксперимент LEP позволил изучить распады Z-бозона и их фит полной ширины его распада в рамках Стандартной Модели даёт число поколений нейтрино $N = 2.94 \pm 0.008$ [10], в то время как прямое измерение невидимой ширины распада даёт $N = 2.92 \pm 0.05$. На сегодняшний день Стандартная модель проверена экспериментально с большой точностью [7], но тем не менее остаются феномены, не объяснимые в её рамках. Например, появление массы у нейтрино (в минимальной СМ нейтрино безмассовые), иерархия масс и другие.

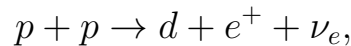
Осцилляционные эксперименты делятся на две группы: эксперименты “на появление” и эксперименты “на исчезновение”. В экспериментах “на исчезновение” нейтрино с определённым флейвором рождается в источнике (например, ν_e), а в детекторе наблюдается уменьшение потока нейтрино этого флейвора в

результате осцилляций, типичным примером таких экспериментов являются эксперименты с солнечными нейтрино. В экспериментах “на появление” в источнике рождается нейтрино с определённым флейвором (например, ν_μ), а в детекторе наблюдаются события, порождённые нейтрино другого флейвора, типичным примером экспериментов этой категории являются эксперименты с ускорительными нейтрино.

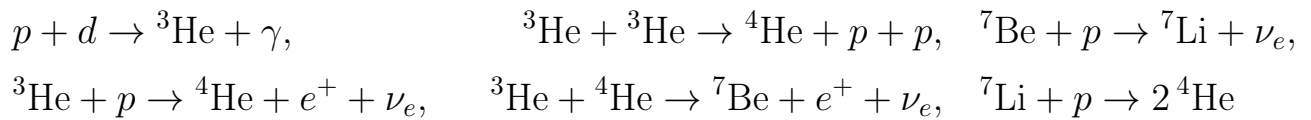
Дадим теперь более подробное описание различных видов источников нейтрино и экспериментов.

1.2 Солнечные нейтрино

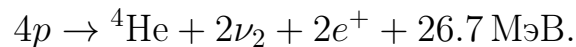
Нейтрино рождаются внутри Солнца в результате термоядерных реакций. Температура в центральных областях Солнца, где происходят реакции, примерно равна $15 \cdot 10^6 \text{ K}$. Нейтрино образуется на всех стадиях цепочки термоядерных реакций, наибольший вклад идёт от pp -реакции:



которая является начальной для pp -цепочки реакций вместе с $p + p + e^- \rightarrow d + \nu_e$. Дальше идёт образование гелия, который дальше вступает в реакции:



Так же нейтрино образуются в CNO цикле, но их сложно детектировать ввиду низких энергий и потоков. Практически вся энергия, излучаемая Солнцем, выделяется в pp -цикле:



Отсюда можно получить оценку на полного потока нейтрино от Солнца, с используя полной светимости Солнца $L_\odot = 3.82 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$, $N_\nu = \frac{2L_\odot}{26.7 \text{ МэВ}} \approx$

Таблица 1.1: Основные реакции, в которых рождаются нейтрино, полные потоки и максимальная энергия нейтрино

Реакция	Поток ($\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$)	Максимальная энергия (МэВ)
$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$	$5.97 \cdot 10^{10}$ (0.6%)	0.42
$p + e^- + p \rightarrow d + \nu_e$	$1.41 \cdot 10^8$ (1.1%)	1.42
${}^3\text{He} + p \rightarrow {}^4\text{He} + e^+ + \nu_e$	$7.9 \cdot 10^3$ (15%)	18.77
${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$	$5.07 \cdot 10^9$ (6%)	0.82
${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be}^* + e^+ + \nu_e$	$5.94 \cdot 10^6$ (11%)	14.6
${}^{13}\text{N} \rightarrow {}^{13}\text{C} + e^+ + \nu_e$	$2.88 \cdot 10^8$ (15%)	1.119
${}^{15}\text{O} \rightarrow {}^{15}\text{N} + e^+ + \nu_e$	$2.15 \cdot 10^8$ (+17% -16%)	1.732
${}^{17}\text{F} \rightarrow {}^{17}\text{O} + e^+ + \nu_e$	$5.82 \cdot 10^6$ (+19% -17%)	1.74

$1.8 \cdot 10^{38} \frac{\text{нейтрино}}{\text{сек}}$. Полное число нейтрино слабо зависит от деталей моделей Солнца, но энергетические спектры и особенно их высокоэнергетическая часть сильно зависят от температуры в центре Солнца и от концентрации гелия.

В таб. 1.1 собраны реакции, ответственные за образование нейтрино в Солнце [11, 12]. Впервые нейтрино от Солнца были зарегистрированы в эксперименте Homestake в 1968 году [13], с помощью радиохимического метода, предложенного Бруно Понтекорво [1]:



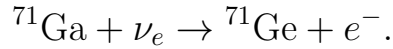
Количество событий в Homestake расходилось с предсказаниями Стандартной Солнечной Модели, что позднее было объяснено осцилляциями нейтрино, после результатов SNO [14]. Эксперимент был наиболее чувствителен к нейтринным событиям от распада ${}^8\text{B}$ и в меньшей степени к событиям от ${}^7\text{Be}$ и CNO . В экспериментах с водным черенковским детектором Kamiokande, SuperKamiokande вместе с жидкостносцинтиляторным детектором Borexino

используется реакция упругого рассеяния нейтрино на электронах:

$$e^- + \nu_e \rightarrow e^- + \nu_e,$$

позволявшая провести измерения верхней части энергетического спектра для ^8B -нейтрино, была подтверждена вариация потоков нейтрино из-за смены времён года из-за эксцентриситета орбиты Земли. Также было проведено измерение эффектов прохождения нейтрино сквозь Землю - разница в числах событий в течении дня и ночи [15], асимметрия день-ночь.

В экспериментах GALLEX, GNO, SAGE использовалась реакция:



Ключевой особенностью этих экспериментов является низкий энергетический порог 233 кэВ, в то время как верхняя граница для pp -нейтрино 422 кэВ, что позволяет им быть чувствительными ко всем типам реакций, приводящих к рождению нейтрино в Солнце. В эксперименте SNO в качестве материала

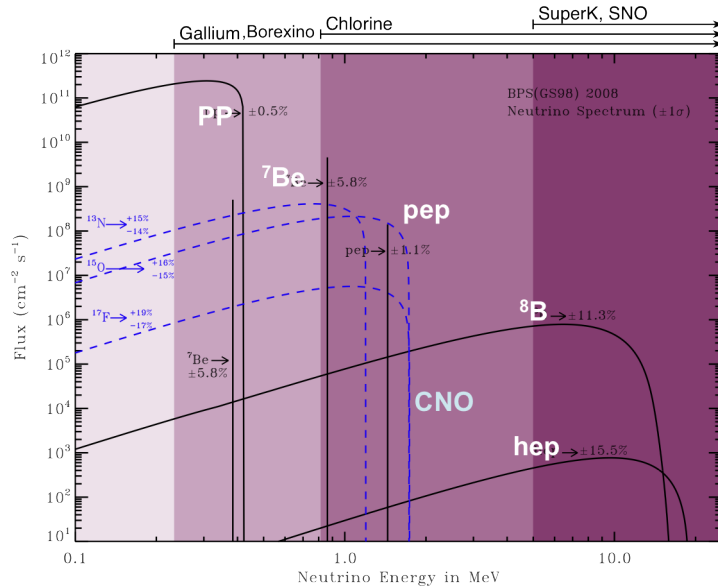


Рис. 1.1: Энергетические спектры солнечных нейтрино.

ла детектора использовалась тяжёлая вода, в которой проходили следующие

реакции:

$$\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-, \quad \nu_x + d \rightarrow p + n + \nu_x, \quad \nu_x + e^- \rightarrow \nu_x + e^-.$$

В этом эксперименте был измерен полный поток солнечных нейтрино всех флейворов, совпадающий с вычисленным теоретически и таким образом установлена реальность осцилляций нейтрино [14, 16, 17].

На рис. 1.1 приведены спектры для всех видов солнечных нейтрино и обозначены чувствительности к ним различных экспериментов [18].

1.3 Гео-нейтрино

Геологические антинейтрино рождаются внутри коры, мантии и ядра Земли в результате распадов тяжёлых элементов. Наиболее важные цепочки распадов, где рождается нейтрино:

$$\begin{aligned} {}^{238}\text{U} &\rightarrow {}^{206}\text{Pb} + 8\alpha + 6e^- + 6\bar{\nu}_e + 51.69 \text{ МэВ}, & {}^{40}\text{K} + e^- &\rightarrow {}^{40}\text{Ar} + \nu_e + 1.5 \text{ МэВ}, \\ {}^{232}\text{Th} &\rightarrow {}^{208}\text{Pb} + 6\alpha + 4e^- + 4\bar{\nu}_e + 42.65 \text{ МэВ}, & {}^{40}\text{K} &\rightarrow {}^{40}\text{Ca} + e^- + \bar{\nu}_e + 1.31 \text{ МэВ}, \\ {}^{235}\text{U} &\rightarrow {}^{207}\text{Pb} + 7\alpha + 4e^- + 4\bar{\nu}_e + 46.4 \text{ МэВ}. \end{aligned}$$

Наибольший вклад в поток гео-нейтрино (почти 99%) дают цепи распадов ${}^{232}\text{Th}$ ($T = 14 \cdot 10^9$ лет), ${}^{238}\text{U}$ ($T = 4.47 \cdot 10^9$ лет), ${}^{235}\text{U}$ ($T = 0.7 \cdot 10^9$ лет) и ${}^{40}\text{K}$ ($T = 1.28 \cdot 10^9$ лет) [19].

Из-за осцилляций нейтрино наблюдаемый поток составляет примерно 55% от исходного и составляет порядка $10^6 \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$.

Регистрация геологических антинейтрино осуществляется с помощью реакции обратного бета-распада (IBD). Ввиду энергетического порога реакции IBD в 1.8 МэВ, на практике можно регистрировать нейтрино от распадов ${}^{238}\text{U}$ и ${}^{232}\text{Th}$. В настоящее время эксперименты KamLAND [20] и Borexino [21] регистрируют геонейтрино.

1.4 Реакторные нейтрино

Исторически первыми в эксперименте Рейнса и Коэна [2] были обнаружены именно реакторные антинейтрино от ядерного реактора в Лос-Аламосе посредством обратного β -распада:

$$p + \bar{\nu}_e \rightarrow n + e^+$$

, что и на сегодняшний день остаётся главным способом регистрации реакторных антинейтрино. Для обнаружения нейтрона использовалась реакция $^{108}\text{Cd} + n \rightarrow ^{109}\text{Cd} + \gamma$ в виду большой величины сечения поглощения нейтрона кадмием. Ключевым фактором идентификации было наблюдение гамма-кванта от кадмия через 5 мс после пары гамма-квантов от электрон-позитронной аннигиляции.

Основными источниками реакторных антинейтрино выступают распады ^{235}U ($\approx 57\%$ от общего потока), ^{239}Pu ($\approx 29\%$), ^{238}U ($\approx 8\%$), ^{241}Pu ($\approx 6\%$). В среднем за одну цепочку распадов образуется шесть антинейтрино и выделяется порядка 200 МэВ энергии. Реактор с термальной мощностью в 1 ГВт испускает поток $\approx 10^{22} \frac{\text{антинейтрино}}{\text{секунду}}$. Измерение энергетических спектров для отдельных изотопов возможно при изучении распадов под влиянием тепловых нейтронов или суммированием по каналам реакций.

1.5 Атмосферные нейтрино

Атмосферные нейтрино рождаются в верхних слоях атмосферы в результате взаимодействия первичных космических лучей с ядрами, приводящим к образованию адронных ливней. Основными источниками нейтрино в таких ливнях являются распады пионов и каонов:

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu), \quad \mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_e (\bar{\nu}_e) + \bar{\nu}_\mu (\nu_\mu). \quad (1.12)$$

Для детектирования атмосферных нейтрино используются подземные водно-черенковские детекторы (Super-Kamiokande). Детекторы необходимо разме-

щать под землёй для отсечения большого фона от мюонов, рождающихся в широких атмосферных ливнях. Энергии атмосферных нейтрино лежат в диапазоне от 100 МэВ до 1 ТэВ.

1.6 Ускорительные нейтрино

Получение нейтринных пучков возможно в лабораторных условиях с помощью ускорителей. К таким экспериментам относятся T2K, Minos, Opera, No ν a. Ускорительные эксперименты являются экспериментами на появление. Для получения нейтрино используется взаимодействие пучка протонов с мишенью, следующее за ним образование вторичных адронов, в частности каонов и пионов, которые затем коллимируются с помощью магнитных линз и направляются к детектору через поглотитель пучка. При взаимодействии с веществом поглотителя все вторичные продукты распадов пионов и каонов исчезают и остаётся чистый нейтринный пучок. Основными распадами, приводящими к рождению нейтрино, являются распады пионов и каонов:

$$\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu_{\mu} (\bar{\nu}_{\mu}), \quad K^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu_{\mu} (\bar{\nu}_{\mu}), \quad K^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm} + \pi^0. \quad (1.13)$$

Главной особенностью ускорительных экспериментов является то, что используется пучок мюонных нейтрино, флейворный состав которого и энергетический спектр определяются профилем и энергией начального пучка протонов. С помощью таких экспериментов можно изучать множество тонких эффектов вроде CP-нарушения, исследования иерархии масс, нарушение Лоренц-инвариантности и другие.

Глава 2

Нейтринные осцилляции в подходе с плоскими волнами

2.1 Нейтринный осцилляции в вакууме

Нейтрино с определённым флейвором α , рождённое в результате слабых взаимодействий, является когерентной суперпозицией состояний с определёнными массой и импульсом:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i V_{\alpha i} |\nu_i(k)\rangle, \quad (2.1)$$

где $V_{\alpha i}$ - это элементы матрицы смешивания (1.1). Стандартный квантовомеханический подход рассматриваем массивные состояния нейтрино в (2.1) как состояния с определённым импульсом - плоские волны. Из-за того, что массовые состояния имеют разную массу, они имеют разные фазовые скорости и это приводит к сдвигу фаз между этими состояниями. Эволюция массовых состояний во времени определяется свободным гамильтонианом \hat{H}_0 , собственными состояниями которого они являются:

$$|\nu_i(t; k)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\nu_i(k)\rangle = e^{-iE_i(k)t} |\nu_i(k)\rangle, \quad E_i(k) = \sqrt{k^2 + m_i^2}, \quad (2.2)$$

Эволюция в пространстве определяется действием оператора сдвига $\exp[i\hat{p}L]$ на эти состояния ввиду трансляционной инвариантности. Таким образом со-

стояние с определённым флейвором (2.1), родившееся при $t = 0$ в точке $x = 0$ имеет вид:

$$|\nu(0; 0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle \rightarrow |\nu(t; L)\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t} e^{i\hat{p}L} |\nu(0; 0)\rangle = \sum_i V_{\alpha i} e^{i(p_i L - E_i t)} |\nu_i\rangle. \quad (2.3)$$

Вероятность обнаружить в детекторе частицу с флейвором β :

$$P_{\alpha\beta}(t; L) = |\langle \nu_\beta | \nu(t, L) \rangle|^2 = \left| \sum_i V_{i\beta}^\dagger V_{\alpha i} e^{i(p_i L - E_i t)} \right|^2 \quad (2.4)$$

В релятивистском пределе в случае стационарного источника [22] энергия одинакова у всех состояний в то время как $p_i = \sqrt{E^2 - m_i^2} \simeq E - \frac{m_i^2}{2E}$ и $t \simeq L$. В этом приближении вероятность (2.4):

$$P_{\alpha\beta}(L) = \sum_{i,j} V_{i\beta}^\dagger V_{\alpha i} V_{j\alpha}^\dagger V_{j\beta} \exp \left[-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} L \right], \quad (2.5)$$

где $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$. Это приближение выполняется во всех современных нейтринных экспериментах. Выражение выше можно переписать в более удобной форме, введя длину осцилляций $L_{ij}^{\text{osc}} = 4\pi E / \Delta m_{ij}^2$:

$$P_{\alpha\beta}(L) = \sum_i |V_{i\beta}|^2 |V_{i\alpha}|^2 + 2\text{Re} \sum_{i < j} V_{i\beta}^\dagger V_{\alpha i} V_{j\alpha}^\dagger V_{j\beta} \exp \left[-2\pi i \frac{L}{L_{ij}^{\text{osc}}} \right]. \quad (2.6)$$

При наличии только двух поколений нейтрино (так называемая двух-нейтринная схема), матрица смешивания параметризуется одним углом, вероятности выживания и исчезновения имеют особенно простой вид:

$$P_{\alpha\alpha} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \pi \frac{L}{L_{\text{osc}}}, \quad P_{\alpha\beta} = \sin^2 2\theta \sin^2 \pi \frac{L}{L_{\text{osc}}} \quad (\alpha \neq \beta). \quad (2.7)$$

Несмотря на свою простоту двух-нейтринная схема является хорошим приближением к трёх-нейтринной и позволяет описывать экспериментальные данные с точностью в несколько процентов из-за того, что $|\Delta m_{31}|^2 \sim |\Delta m_{32}|^2 \gg \Delta m_{21}^2$ и $|V_{e3}|^2 \ll 1$. Двух-нейтринные схемы, используемые в анализах разных

Таблица 2.1: Двух-нейтринные схемы, используемые в анализе разных экспериментов.

Эксперименты	Вероятность выживания
Солнечные (Borexino, SNO, SK)	$P_{ee} = 1 - \sin^2 2\theta_{21} \sin^2 \frac{\Delta m_{21}^2}{4E}$
Атмосферные (SuperKamioKande)	$P_{\mu\mu} = 1 - \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \frac{\Delta m_{\mu\mu}^2}{4E}$
Ускорительные (Minos, K2K)	$P_{\mu\mu} = 1 - \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \frac{\Delta m_{\mu\mu}^2}{4E}$
Реакторные (RENO, CHOOZ, Daya Bay)	$P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e} = 1 - \sin^2 2\theta_{31} \sin^2 \frac{\Delta m_{ee}^2}{4E}$

экспериментов приведены в таб. 2.1. При выводе (2.6) было неявно предположено, что распространение нейтрино является одномерным. Это приближение опирается на то [22], что изменение осцилляционной фазы по сравнению со предсказанием (2.6), связанное с отклонением от классической одномерной траектории, не может наблюдаться на эксперименте.

Заметим, что можно получить стандартную осцилляционную формулу и в предположении, что у всех массивных состояний одинаковый импульс, что приведёт к замене $L \rightarrow t$, $E \rightarrow p$, но в ультрарелятивистском пределе они совпадают. Но как будет показано в 2.3 эти предположения не верны.

2.2 Нейтринные осцилляции в веществе

При прохождении нейтрино через вещество оно может когерентно рассеиваться на частицах среды посредством реакций нейтрального и заряженного токов, что приводит к существенному изменению характера осцилляций по сравнению с вакуумными.

Последовательное квантовомеханическое описание состоит в описании распространения нейтрино в веществе как распространение в некоем эффективном потенциале, зависящим от состава среды, электрической нейтральности,

Таблица 2.2: Эффективные материальные потенциалы, верхний знак относится к случаю нейтрино, нижний к антинейтрино.

Реакция	Эффективный потенциал
$\nu(\bar{\nu})e^- \rightarrow \nu(\bar{\nu})e^-$	$V_W^e = \pm\sqrt{2}G_F n_e$
$\nu(\bar{\nu})p \rightarrow \nu(\bar{\nu})p$	$V_Z^p = \pm\frac{G_F}{\sqrt{2}}(1 - 4\sin^2\theta_W)N_p$
$\nu(\bar{\nu})e^- \rightarrow \nu(\bar{\nu})e^-$	$V_Z^e = \mp\frac{G_F}{\sqrt{2}}(1 - 4\sin^2\theta_W)N_e$
$\nu(\bar{\nu})n \rightarrow \nu(\bar{\nu})n$	$V_Z^n = \mp\frac{G_F N_n}{\sqrt{2}}$

намагниченности(ориентации спинов), скоростей частиц среды. Эта концепция впервые была использована в работе [23]. В случае электронейтральной, немагнитной, нерелятивистской среды потенциалы для рассеяния на электронах, протонах и нейтронах [24] приведены в таблице 2.2. Потенциалы, отвечающие когерентному рассеянию на мюонах и тау-лептонах за счёт реакции заряженного тока могут быть получены из V_W^e заменой концентрации электронов на концентрации соответственно мюонов и тау. Общей чертой потенциалов для всех реакций, рассмотренных выше являлось, то что они приводят к потенциалам диагональным во флейворном базисе.

Возможная также реакция $\nu\nu \xrightarrow{Z} \nu\nu$ приводит к потенциалам недиагональным в этом базисе в общем случае, но имеет существенно меньшей сечение и их учёт становится важен только в средах с огромной плотностью нейтрино. Например, в нейтриносфере при взрывах сверхновых или в ранней Вселенной. Изучение распространения нейтрино в таких средах является сложной нелинейной задачей [25–27].

Приведём короткий обзор основных шагов вывода эффективного потенциала V_W^e . В обычных средах средние энергии частиц много меньше массы W -бозона, так что лагранжиан электрослабого взаимодействия электронов с калибровочным полем можно рассматривать как лагранжиан Ферми:

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e(x)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)e(x)] [\bar{e}(x)\gamma_\mu(1 - \gamma^5)\nu_e(x)]. \quad (2.8)$$

Проведём преобразование Фирца для разделения в лагранжиана токов нейтрино и электронов. Состояние системы “нейтрино + вещество” построим в виде прямого произведения состояний нейтрино с определённым импульсом и состояний вещества $|\nu(p) + \text{mat}\rangle = |\nu(p)\rangle \otimes |\text{mat}\rangle$. Усредняя (2.8) по таким состояниям, получаем эффективный лагранжиан, описывающий взаимодействующее со средой нейтрино:

$$[\mathcal{L}_{CC}]_{\nu_e} = -\bar{\nu}_e \gamma_\mu [(V_e)_{CC}^\mu(x)] P_L \nu_e, \quad [(V_e)_{CC}^\mu(x)] = \sqrt{2} G_F \langle \text{mat} | \bar{e}(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e(x) | \text{mat} \rangle$$

Средние значения компонент электронного тока могут быть получены, используя решения уравнения Дирака для электронов [28]:

$$\begin{aligned} \langle \bar{e}(x) \gamma^0 e(x) \rangle &= n_e(x), & \langle \bar{e} \gamma^i e(x) \rangle &= n_e(x) v_e^i(x), & \langle \bar{e}(x) \gamma^0 \gamma^5 e(x) \rangle &= n_e(x) \langle \sigma_e \cdot \mathbf{v}_e \rangle, \\ \langle \bar{e}(x) \gamma^i \gamma^5 e(x) \rangle &= n_e(x) \left[m_e \left\langle \frac{\sigma^i}{E_e} \right\rangle + \left\langle \frac{E_e}{E_e + m_e} v_e^i (\sigma_e \cdot \mathbf{v}_e) \right\rangle \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

где n_e концентрация электронов в среде, $\mathbf{v}_e(x)$ 3-вектор скорости в среде и σ_e^i матрицы Паули для электрона (проекция спина). Все средние от аксиальных компонент тока зануляются в среде из неполяризованных частиц, нет выделенной ориентации спина. Если частицы, составляющие среду, также могут быть рассмотрены как нерелятивистские, то оставшейся в (2.9) компонентой, зависящей от скорости также можно пренебречь. Переходя к гамильтониану взаимодействия с использованием известного соотношения $\mathcal{L}_{\text{int}} = -H_{\text{int}}$ получаем выражение для эффективного потенциала взаимодействия нейтрино со средой:

$$(V_W^e)_{\alpha\beta} = \sqrt{2} G_F n_e(x) \delta_{e\alpha} \delta_{e\beta}, \quad (2.10)$$

что совпадает с приведённым в таб. 2.2 выражением.

Рассмотрение петлевых поправок к данным потенциалам было приведено в работе [29]. Эти поправки различаются для разных флейворов из-за различия масс заряженных лептонов. На древесном уровне потенциалы для ν_μ и ν_τ не различаются, но они начинают различаться при учёте петлевых поправок. Но относительное различие $\Delta V_{\tau\mu}/V \sim 10^{-5}$ и может быть важно только при очень больших плотностях [30].

На сегодняшний день достаточно хорошо изучено прохождение нейтрино сквозь Землю с помощью наблюдения асимметрии день-ночь и атмосферных нейтрино, а также влияние вещества Солнца на осцилляции нейтрино (MSW-эффект). В этих средах нет значительного числа мюонов и тау-лептонов, поэтому на распространение нейтрино оказывает влияние только рассеяние на электронах. Эффективный потенциал за счёт рассеяния через нейтральный ток на протонах и электронах в случае электронейтральной среды, оказывается равным нулю, таб. 2.2. Рассеяние на нейтронах через нейтральный ток приводит к потенциалу, диагональному во флейворном базисе и одинаковому для всех флейворов, поэтому он не оказывает влияния на флейворные осцилляции. Таким образом, необходимо учитывать только рассеяние на электронах за счёт реакций заряженного тока.

Запишем эффективный гамильтониан для нейтрино с учётом рассеяния на электронах в массовом базисе в двух-нейтринном случае для простоты:

$$H = \left(p + \frac{m_i^2}{2E}\right)\delta_{ij} + V_{ei}^* V_{ej} \sqrt{2} G_F n_e \quad (2.11)$$

где p можно отбросить ввиду того, что его вклад одинаков для всех флейворов и не влияет на флейворные осцилляции. V - это лептонная матрица смешивания PMNS, параметризуемая одним углом в двух-нейтринном случае.

Недиагональность гамильтониана в базисе вакуумных массовых состояний соответствует тому, что рассеяние на электронах среды может приводить к переходу одного массового состояния в другое в процессе распространения $\nu_i e^- \rightarrow \nu_j e^-$ с амплитудой равной матричному элементу полного гамильтониана между эти состояниями H_{ij} . Это указывает на то, что эти состояния больше не являются состояниями распространения и мы должны найти новые состояний распространения, диагонализуя гамильтониан.

Гамильтониан (4.1) может быть локально диагонализирован в каждой точке пространства с помощью унитарного преобразования:

$$U(x) H U^\dagger(x) = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{m}_1^2(x)}{2E} & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{m}_2^2(x)}{2E} \end{pmatrix}, \quad U(x) = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta}(x) & \sin \tilde{\theta}(x) \\ -\sin \tilde{\theta}(x) & \cos \tilde{\theta}(x) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Наличие вещества привело к изменению угла смешивания. Новый угол смешивания вместе с новыми эффективными массами изменяется при изменении плотности электронов:

$$\tilde{m}_{1,2}^2(x) = \frac{1}{2} \left(\Sigma + A(x) \mp \Delta m^2 \sqrt{\left(\cos 2\theta - \frac{A(x)}{\Delta m^2} \right)^2 + \sin^2 2\theta} \right), \quad (2.13)$$

$$\sin^2 2\tilde{\theta}(x) = \frac{\sin^2 2\theta}{\left(\cos 2\theta - \frac{A(x)}{\Delta m^2} \right)^2 + \sin^2 2\theta}, \quad (2.14)$$

где $A(x) = 2E\sqrt{2}G_F n_e(x)$, $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$, $\Sigma = m_1^2 + m_2^2$.

Например для профиля электронной концентрации в Солнце (2.27) зависимости $\sin^2 2\tilde{\theta}$ от расстояния от центра Солнца и энергии нейтрино приведены на рисунках 2.1 и 2.2.

Новые собственные состояния гамильтониана являются состояниями пространства (в случае постоянной плотности вещества) и связаны с вакуумными массовыми состояниями и флейворными состояниями следующим образом:

$$|\tilde{\nu}_1(x)\rangle = |\nu_e\rangle \cos \tilde{\theta} - |\nu_\mu\rangle \sin \tilde{\theta} = |\nu_1\rangle \cos(\tilde{\theta} - \theta) - |\nu_2\rangle \sin(\tilde{\theta} - \theta), \quad (2.15)$$

$$|\tilde{\nu}_2(x)\rangle = |\nu_e\rangle \sin \tilde{\theta} + |\nu_\mu\rangle \cos \tilde{\theta} = |\nu_1\rangle \sin(\tilde{\theta} - \theta) + |\nu_2\rangle \cos(\tilde{\theta} - \theta). \quad (2.16)$$

В случае постоянной плотности для получения длины и вероятностей осцил-

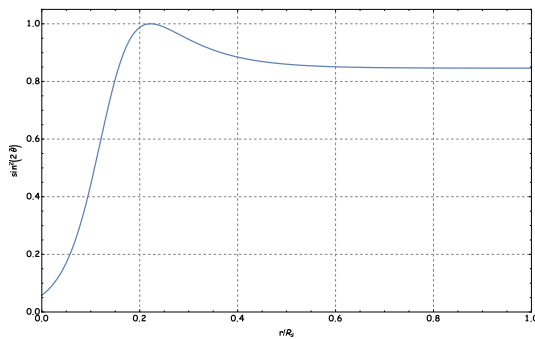


Рис. 2.1: $\sin^2 2\tilde{\theta}(r)$ при $E = 8$ МэВ.

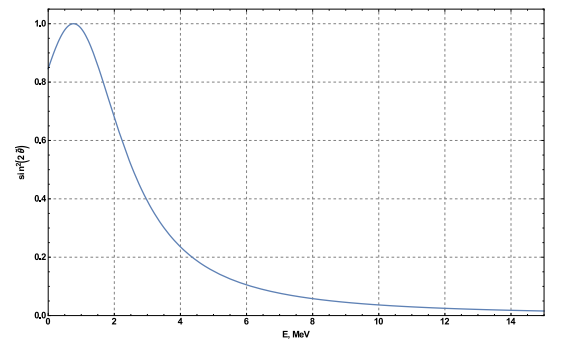


Рис. 2.2: $\sin^2 2\tilde{\theta}(E)$ при $r = 0$.

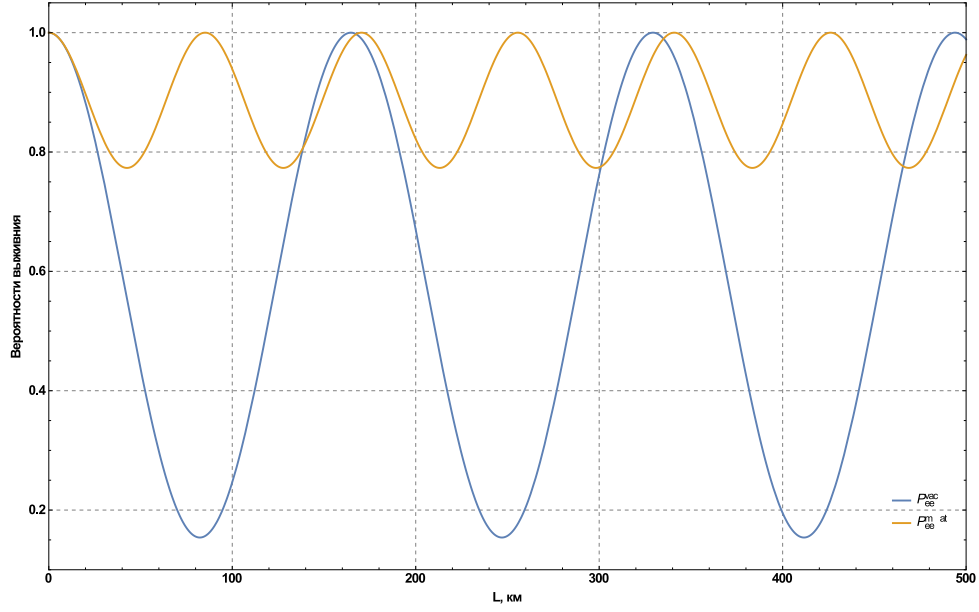


Рис. 2.3: Вероятности выживания P_{ee} при энергии $E_\nu = 10$ МэВ в вакууме и в веществе с постоянной плотностью электронов, соответствующей 100 г/см^3

для чего необходимо провести замену $\Delta m^2 \rightarrow \Delta \tilde{m}^2$ в вакуумных формулах (2.7):

$$P_{\alpha\alpha} = 1 - \sin^2 2\tilde{\theta} \sin^2 \pi \frac{L}{\tilde{L}^{\text{osc}}}, \quad P_{\alpha\beta} = \sin^2 2\tilde{\theta} \sin^2 \pi \frac{L}{\tilde{L}^{\text{osc}}} \quad (\alpha \neq \beta), \quad (2.17)$$

где длина осцилляций в веществе связана с вакуумной длиной:

$$\tilde{L}^{\text{osc}} = L^{\text{osc}} \frac{\sin 2\tilde{\theta}}{\sin 2\theta} = L^{\text{osc}} \left[1 + \frac{L^{\text{osc}}}{L_e} - \frac{2L^{\text{osc}}}{L_e} \cos 2\theta \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad L_e = \frac{2\pi}{\sqrt{2}G_F n_e} \quad (2.18)$$

Характерный пример модификации осцилляций изображён на рис. 2.3.

Рассмотрим основные аспекты влияния материи на осцилляции и положим для определённости $|\theta| < \pi/4$. Влияние вещества может приводить как к уменьшению смешивания между поколениями, так к усилению его, в зависимости от знака Δm^2 :

- В случае $\Delta m^2 < 0$ угол смешивания $\tilde{\theta} < \theta$, что приводит к подавлению осцилляций по сравнению с вакуумными. Разность квадратов масс в веществе возрастает по сравнению с вакуумной $|\Delta \tilde{m}^2| > |\Delta m^2|$.
- В случае $\Delta m^2 > 0$ угол смешивания $\tilde{\theta} > \theta$. Влияние вещества может

приводить к максимальному смешиванию $\tilde{\theta} = \pi/2$ даже в случае малых вакуумных углов смешивания.

Рассмотрим три важных предельных случая значений плотности:

- В случае плотности электронов $n_e \rightarrow 0$ вещество перестаёт влиять на осцилляции и происходит плавный переход к вакуумному случаю:

$$\tilde{\theta} \rightarrow \theta, \quad |\tilde{\nu}_1\rangle \rightarrow |\nu_1\rangle \text{ и } |\tilde{\nu}_2\rangle \rightarrow |\nu_2\rangle \quad (2.19)$$

- При плотности электронов $n_e \rightarrow \infty$ угол смешивания максимален $\tilde{\theta} \rightarrow \pi/2$ и флейворные состояния переходят в массовые состояния в веществе $|\nu_e\rangle = |\tilde{\nu}_2\rangle$ и $|\nu_\mu\rangle = -|\tilde{\nu}_1\rangle$. Вероятность исчезновения в этом пределе сильно подавлена:

$$P_{e\mu} = \left(\frac{L_e}{L^{\text{osc}}} \right) \sin^2 \theta \sin^2 \pi \frac{L}{L_e} \ll 1 \quad (2.20)$$

- Интересное резонансное поведение вероятностей происходит при $\tilde{\theta} = \pi/4$, отвечающей значению плотности при значении плотности:

$$n_e^{\text{res}} = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{2}G_F E}, \quad P_{e\mu} = \sin^2 \left(\pi \frac{\sin 2\theta L}{L^{\text{osc}}} \right). \quad (2.21)$$

Необходимо отметить, что величина резонансной плотности зависит от энергии нейтрино.

Рассмотрим теперь распространение нейтрино в среде с переменной плотностью вещества. Запишем уравнение Шрёдингера на вектор состояния для гамильтониана (4.1):

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\nu(t)\rangle = \hat{H} |\nu(t)\rangle \quad (2.22)$$

Действие гамильтониана на собственный вектор (2.15) определяется как:

$$\hat{H} |\tilde{\nu}_i(t; p)\rangle = \tilde{E}_i(t; p) |\tilde{\nu}_i(t; p)\rangle$$

Спроектируем теперь на базис собственных состояний (2.15):

$$\langle \tilde{\nu}_j(t; p) | i \frac{\partial}{\partial t} | \nu(t) \rangle = \langle \tilde{\nu}_j(t; p) | \hat{H}(t) | \nu(t) \rangle = \tilde{E}_j(t; p) \langle \tilde{\nu}_j(t; p) | \nu(t) \rangle \quad (2.23)$$

Приведём вид этого уравнения явно в матричной форме, введя для краткости обозначение $\langle \tilde{\nu}_i(t; p) | \nu(t) \rangle = a_i(t)$:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta \tilde{m}^2(t) & -4iE\dot{\theta}(t) \\ 4iE\dot{\theta}(t) & \Delta \tilde{m}^2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Точные решения этого уравнения известны лишь для очень немногих профилей электронных плотностей [31]. Чаще всего приходится пользоваться различными приближениями для нахождения его решений.

Наиболее распространённым является так называемое адиабатическое приближение. Оно заключается в пренебрежении недиагональными членами в уравнении (2.23) по сравнению с диагональными:

$$\langle \tilde{\nu}_j(t; p) | i \frac{\partial}{\partial t} | \nu(t) \rangle \approx i \frac{\partial}{\partial t} \langle \tilde{\nu}_j(t; p) | \nu(t) \rangle, \quad (2.25)$$

Легко понять физический смысл этого приближения. Массовые состояния в веществе также изменяются при распространении согласно (2.15), в точках $\Delta \tilde{m}^2 = 0$ становятся возможны переходы между из одного состояния в другое. В адиабатическом приближении мы пренебрегаем такими переходами: если нейтрино родилось в виде массового состояния, например, $|\nu_e\rangle = |\tilde{\nu}_2(0)\rangle$, ($n_e \rightarrow \infty$), то в результате адиабатической эволюции оно останется во втором массовом состоянии в веществе $|\nu(t)\rangle = |\tilde{\nu}_2(t)\rangle$.

Точкой наиболее подозрительной на нарушение адиабатичности является точка MSW-резонанса, где угол смешивания меняется быстрее всего. Адиабатическое приближение заведомо выполняется, когда показатель адиабатичности γ [32]:

$$\gamma = \frac{1}{4E} \left[\frac{\Delta \tilde{m}^2(t_r)}{\dot{\theta}_M(t_r)} \right] \gg 1. \quad (2.26)$$

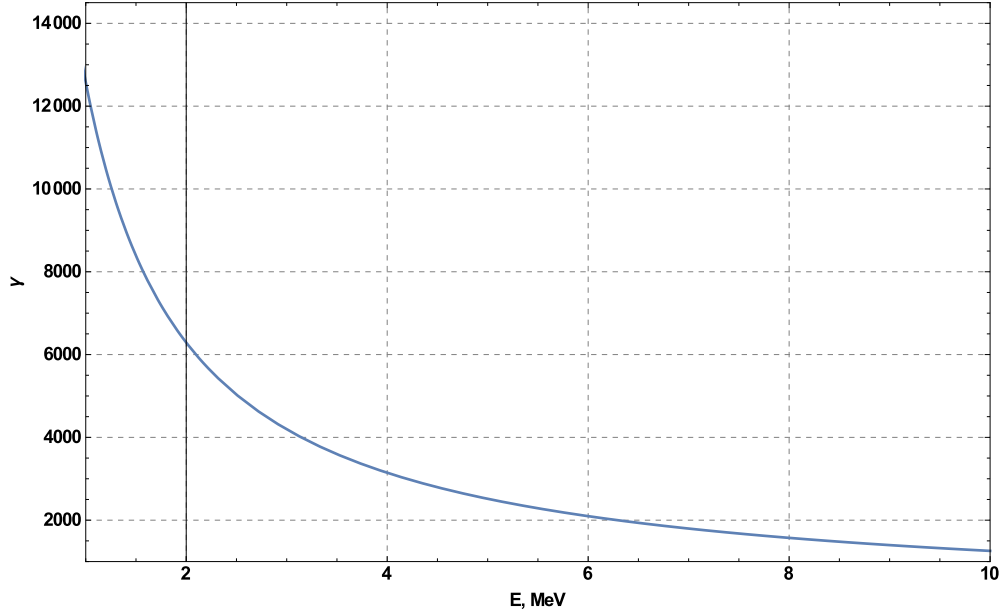


Рис. 2.4: Показатель адиабатичности, соответствующий плотности (2.27) в диапазоне энергий от 1–10 МэВ

В Солнце концентрация электронов хорошо аппроксимируется экспоненциальным профилем [33]:

$$n_e(r) = 245N_A \exp\left[-\frac{r}{r_0}\right] \text{ см}^{-3}, \quad r_0 = \frac{R_\odot}{10.56}, \quad (2.27)$$

где r - расстояние от центра Солнца, R_\odot - радиус Солнца. Это приводит к показателю адиабатичности:

$$\gamma \simeq 2 \cdot 10^4 \left(\frac{\text{МэВ}}{E}\right), \quad (2.28)$$

что для характерных энергий солнечных нейтрино (рис. 1.1) приводит к заведомому выполнению условия (2.26) (рис.2.4) .

Уравнение Шрёдингера на компоненты вектора состояния в массовом базисе в адиабатическом приближении:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\langle\tilde{\nu}_j(t;p)|\nu(t)\rangle = \tilde{E}_j(t;p)\langle\tilde{\nu}_j(t;p)|\nu(t)\rangle \quad (2.29)$$

может быть легко решено:

$$\langle \tilde{\nu}_j(t; p) | \nu(t) \rangle = \exp \left(-i \int_{t_0}^t d\tau \tilde{E}_j(\tau; p) \right) \langle \tilde{\nu}_j(t_0; p) | \nu(t_0) \rangle. \quad (2.30)$$

Здесь t_0 несёт двойную смысловую нагрузку как начальный момент времени, так и как точка рождения нейтрино $x(t_0)$.

Вероятности осцилляций можно найти, спроектировав состояние $|\nu(t)\rangle$ на состояние с определённым флейвором $\langle \nu_\beta |$, разложенное предварительно по базису (2.15) в момент времени t :

$$P_{\alpha\beta} = \sum_{i,j} U_{\alpha i}^*(t_0) U_{\beta i}(t_0) U_{\beta j}^*(t) U_{\alpha j}(t) \exp \left[-i \int_{t_0}^t d\tau \frac{\Delta \tilde{m}_{ij}^2(\tau)}{2E} \right]. \quad (2.31)$$

Зависимость угла смешивания от энергии нейтрино (2.14) опущена для краткости. Для примера приведём вероятность выживания:

$$\begin{aligned} P_{ee} &= \cos^2 \tilde{\theta}(t_0) \cos^2 \tilde{\theta}(t) + \sin^2 \tilde{\theta}(t_0) \sin^2 \tilde{\theta}(t) - \\ &- \frac{1}{2} \sin 2\tilde{\theta}(t_0) \sin 2\tilde{\theta}(t) \cos \left(\int_{t_0}^t d\tau \frac{\Delta \tilde{m}^2(\tau)}{2E} \right) = \\ &= \cos^2 \tilde{\theta}(t_0) \cos^2 \tilde{\theta}(t) + \sin^2 \tilde{\theta}(t_0) \sin^2 \tilde{\theta}(t) - \frac{1}{2} \sin 2\tilde{\theta}(t_0) \sin 2\tilde{\theta}(t) \cos \left(2\pi \frac{L}{\tilde{L}^{\text{osc}}} \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Длину осцилляций стала нелокальной величиной - она зависит от всей траектории нейтрино

$$\tilde{L}^{\text{osc}} = \frac{4\pi E}{\int_{t_0}^t d\tau \Delta \tilde{m}^2(\tau)}.$$

2.3 Чем плох подход с плоскими волнами?

В процессе вывода (2.6) нами был сделан ряд предположений на первый взгляд разумных, но при более пристальном рассмотрении оказывающихся противоречивыми. Предположения, что все массивные нейтрино несут одинаковые энергию или импульс в (2.1), является некорректными и противоречивыми. Чтобы понять это обратимся к кинематике типичного процесса

рождения нейтрино - двухчастичного распада пиона $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$, считая что верно (2.1). Тогда импульс и энергия массивных состояний:

$$p_k^2 = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2 - m_k^2)^2 - 4m_k^2 m_\mu^2}{4m_\pi^2}, \quad E_k^2 = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2 + m_k^2)^2}{4m_\pi^2}. \quad (2.33)$$

Как видно отсюда, предположение об одинаковых импульсах или энергиях не может быть выполнено.

Другой проблемой плосковолнового подхода является неопределённость осцилляционной фазы. При выводе (2.4), предположено, что массивные нейтрино распространяется со скоростью $v_i = 1$ в естественной системе единиц. Но скорость частицы с массой m_i определяется как $v_i = p_i/E_i$, и, соответственно, время распространения является разным для разных массовых состояний $t \rightarrow t_i = \frac{L}{v_i}$:

$$\varphi_{ij} = (E_i t_i - E_j t_j) - (p_i - p_j)L = \frac{m_i^2 - m_j^2}{E} L. \quad (2.34)$$

Эта фаза в два раза больше, чем в (2.4), и не ясно какую следует использовать.

Ещё одним туманным местом является придание смысла расстоянию L . Состояния с определённым импульсом, плоские волны, заполняют всё пространство. Так между какими точками берётся L ?

Заряженные лептоны и нейтрино входят симметрично в лагранжиан Стандартной модели:

$$\mathcal{L}_{\text{leptons}} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha i} V_{\alpha i} \bar{l}_{\alpha L} \gamma_\mu \nu_{iL} W_\mu + \text{h.c.} \quad (2.35)$$

Поэтому не ясно почему флейворное нейтрино рождается как когерентная суперпозиция массивных состояний, в том время как заряженные лептоны нет.

Глава 3

Нейтринные осцилляции в подходе с волновыми пакетами

3.1 Осцилляции в вакууме

Проблемы плосковолнового подхода связаны с тем, что в нём не учитываются процессы рождения и детектирования нейтрино. Учёт локализации этих процессов в пространстве приводит к локализации нейтрино.

Наиболее естественный подход для описания локализованных частиц известный из оптики и квантовой механики - это использование волновых пакетов [34]. Волновой пакет - это линейная суперпозиция состояний с определённым импульсом с каким-то распределением импульсов в пакете. Существуют два отличных друг от друга подхода, использующих волновые пакеты, к описанию нейтринных осцилляций: квантово-механический и квантово-полевой.

В квантово-механическом подходе всё особенности процессов рождения и детектирования переносятся на формы и ширины нейтринных волновых пакетов, которые никак не вычисляются, а постулируются [35–37].

В квантово-полевым подходе нейтрино распространяется виртуально меж-

ду источником и детектором, а эффективная ширина нейтринного пакета вычисляется вычисляется из ширин пакетов родительских и вторичных частиц [38–41].

Несмотря на концептуальное различие, оба подхода после различных приближений приводят к близким к друг другу результатам.

Изложим квантово-механическую теорию нейтринных осцилляций в вакууме с использованием волновых пакетов.

Состояние с определённым флейвором в этом формализме рождается как смесь состояний с определённой массой, распределённых по импульсу:

$$|\nu_\alpha(\mathbf{p})\rangle = \sum_i V_{\alpha i} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} f(\mathbf{k}, \mathbf{p}) |\nu_i(\mathbf{k})\rangle, \quad (3.1)$$

где \mathbf{p} - это средний импульс состояний в пакете, а $f(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ - это формфактор пакета, определяющий распределение импульсов в пакете. Обычно считается, что формфактор пакета имеет единственный резкий пик вблизи среднего импульса. Форма пакета обычно рассматривается гауссовой:

$$f(\mathbf{k}; \mathbf{p}, \sigma^2) = \left(\frac{2\pi}{\sigma^2}\right)^{\frac{3}{4}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2}{4\sigma^2}\right]. \quad (3.2)$$

Нормировка выбрана таким образом, чтобы состояния (3.1) были нормированы на 1:

$$\langle \nu_i(\mathbf{q}) | \nu_j(\mathbf{k}) \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \delta_{ij}, \quad \langle \nu_\alpha(\mathbf{p}) | \nu_\alpha(\mathbf{p}) \rangle = 1. \quad (3.3)$$

Волновая функция в координатном представлении, соответствующая (3.1) является даётся гауссовской функцией с центром в начале координат и пространственной шириной $\sigma_x = \frac{1}{2\sigma}$. Используя разложение:

$$E_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{p}} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) + \frac{m^2}{2E_{\mathbf{p}}^3}(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{k})^2}{2E_{\mathbf{p}}^3} + \dots, \quad (3.4)$$

получим в пределе узких пакетов $\sigma \ll E(\mathbf{p})$ координатную волновую функцию [42] для (3.2):

$$\psi(x) = \frac{\exp\left[-\frac{(\mathbf{x}_L - \mathbf{v}t)^2}{4\sigma_x^2(1+it/\tau_L)} - \frac{\mathbf{x}_T^2}{4\sigma_x^2(1+it/\tau_T)}\right]}{(2\pi)^{3/4} \sigma_x^{3/2} \sqrt{1+it/\tau_L}(1+it/\tau_T)} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x} - iE(\mathbf{p})t}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial E(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}, \quad (3.5)$$

где

$$\tau_L = \gamma_{\mathbf{p}}^3 \tau, \quad \tau_T = \gamma_{\mathbf{p}} \tau, \quad \tau = 2\sigma_x^2 m, \quad \gamma_{\mathbf{p}} = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m}, \quad (3.6)$$

а также \mathbf{x}_L и \mathbf{x}_T компоненты \mathbf{x} параллельные и перпендикулярные соответственно среднему и наиболее вероятному вектору скорости \mathbf{v} .

Волновая функция (3.5) расплывается со временем, в то время как средняя координата его центра перемещается по классической траектории. “Продольная” $\sigma_{xL}^2(t)$ и “поперечная” $\sigma_{xT}^2(t)$ дисперсии изменяются со временем как:

$$\sigma_{xL}^2(t) = \sigma_x^2(1 + t^2/\tau_L^2), \quad (3.7)$$

$$\sigma_{xT}^2(t) = \sigma_x^2(1 + t^2/\tau_T^2), \quad (3.8)$$

что приводит к подавлению проинтегрированной по времени плотности как $1/|x|^2$, как и ожидается для ансамбля классических частиц. При рассмотрении плоских волн одномерное приближение оказалось хорошо обосновано [22], поэтому считая что поперечное расплывание волновых пакетов не играет существенной роли для описания нейтринных осцилляций, мы будем использовать одномерное приближение в дальнейшем.

Рассмотрим одномерный волновой пакет в момент времени t , родившийся в момент времени t_s в точке x_s :

$$|\nu_\alpha(t; p_s, x_s, t_s)\rangle = \sum_i V_{\alpha i} \int \frac{dk}{2\pi} f(k; p_s, \sigma_s^2) e^{-iE_i(k)(t-t_s) + ikx_s} |\nu_i(k)\rangle, \quad (3.9)$$

с соответствующим гауссовым формфактором

$$f(k; p, \sigma^2) = \left(\frac{2\pi}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{(k-p)^2}{4\sigma^2}\right]. \quad (3.10)$$

Построим состояние, наблюдаемое в детекторе, которое также описывается волновым пакетом, чтобы учитывать пространственную локализацию процесса детектирования:

$$|\nu_\beta(t; p_d, x_d)\rangle = \sum_i V_{\beta i} \int \frac{dk}{2\pi} f(k; p_d, \sigma_d^2) e^{-iE_i(k)t + ikx_d} |\nu_i(k)\rangle. \quad (3.11)$$

Амплитуда перехода даётся проекцией (3.10) на (3.11):

$$\begin{aligned}
A_{\alpha\beta}(t, L) &= \langle \nu_\beta(t; p_d, x_d) | \nu_\alpha(t; p_s, x_s, t_s) \rangle = \\
&= \sum_j V_{j\beta}^\dagger V_{\alpha j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} f^*(k; p_d, \sigma_d^2) f(k; p_s, \sigma_s^2) e^{-iE_j(k)(t-t_s) + ikL}, \quad (3.12)
\end{aligned}$$

где $L = |x_d - x_s|$ - это расстояние между детектором и источником.

Произведение гауссовых формфакторов в (3.12) так же является гауссовой функцией, но с новыми эффективными средним импульсом p и шириной пакета σ_p :

$$p = \frac{p_s \sigma_d^2 + p_d \sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_d^2} = \sigma_p^2 \left(\frac{p_s}{\sigma_s^2} + \frac{p_d}{\sigma_d^2} \right), \quad \frac{1}{\sigma_p^2} = \frac{1}{\sigma_s^2} + \frac{1}{\sigma_d^2}. \quad (3.13)$$

В явном виде амплитуда (3.12) выглядит следующим образом:

$$A_{\alpha\beta}(t, L) = \sum_j V_{i\beta}^\dagger V_{\alpha i} \sqrt[4]{\frac{(2\pi)^2}{\sigma_s^2 \sigma_d^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp \left[-\frac{(k-p)^2}{4\sigma_p^2} - \frac{(p_s - p_d)^2}{4(\sigma_s^2 + \sigma_d^2)} \right] e^{-iE_j(k)t + ikL}. \quad (3.14)$$

Импульсный интеграл может быть вычислен в пределе узкого пакета $\sigma_p \ll p$.

Разложим энергии вблизи среднего импульса:

$$E_j(k) \approx E_j(p) + v_j(p) (k - p) + \frac{m_j^2}{2E_j^3(p)} (k - p)^2, \quad v_j(p) = \frac{dE_j(p)}{dp}. \quad (3.15)$$

Здесь $v_i(p)$ - это групповая скорость пакета, относящегося к состоянию с массой m_i . Возьмём теперь явно интеграл по импульсам:

$$\begin{aligned}
A_{\alpha\beta}(t, L) &= \exp \left[-\frac{(p_s - p_d)^2}{4(\sigma_s^2 + \sigma_d^2)} \right] \sum_j V_{j\beta}^\dagger V_{\alpha j} \sqrt[4]{\frac{\pi}{4\sigma_s^2 \sigma_d^2 \sigma_x^4 (1 + it/\tau_j^d)^2}} \times \\
&\quad \times \exp \left[-\frac{(L - v_j t)^2}{4\sigma_x^2 (1 + it/\tau_j^d)} \right] e^{-iE_j(p)(t-t_s)}, \quad (3.16)
\end{aligned}$$

где

$$\tau_j^d = \frac{E_j^3(p)}{2m_j^2 \sigma_p^2}, \quad \sigma_x = \frac{1}{2\sigma_p}. \quad (3.17)$$

определяет масштаб времени, когда расплывание волнового пакета становится существенным, а фактор

$$\sqrt{\frac{\pi}{\sigma_s^2 + \sigma_d^2}} \exp \left[-\frac{(p_s - p_d)^2}{4(\sigma_s^2 + \sigma_d^2)} \right] \quad (3.18)$$

является “размазанным” аналогом $2\pi\delta(p_s - p_d)$, выражающей закон сохранения энергии-импульса.

Вероятность, получаемая из (3.16), не является величиной измеряемой на эксперименте непосредственно, поскольку она зависит от неизвестных момента рождения в источнике t_s и импульса родившегося нейтрино p_s . Наблюдаемой величиной является число “событий” в детекторе, являющееся получающейся при усреднении по этим переменным:

$$\int dt_s dp_s \frac{d^2 n_\nu}{dt_s dp_s} |A_{\alpha\beta}(t - t_s, L; p_s, p_d)|^2 \simeq \left\langle \frac{d^2 n_\nu}{dt_s dp_s} \right\rangle P_{\alpha\beta}(L), \quad (3.19)$$

где $d^2 n_\nu(t_s, p_s)/dt_s dp_s$ - плотность числа рождённых нейтрино в источнике на единичные временной dt_s и импульсный интервалы, скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают усреднение по энергетическим и временным интервалам, на которых $|A_{\alpha\beta}(t - t_s, L; p_s, p_d)|^2$ существенно меняется. Это позволяет определить усреднённую вероятность как:

$$P_{\alpha\beta}(L) \simeq \frac{1}{\left\langle \frac{d^2 n_\nu}{dt_s dp_s} \right\rangle} \int dt_s dp_s \frac{d^2 n_\nu}{dt_s dp_s} |A_{\alpha\beta}(t - t_s, L; p_s, p_d)|^2. \quad (3.20)$$

Усреднение по времени сводится к гауссовому интегралу по времени, так как на характерном масштабе времени наступления экспоненциального подавления амплитуды (3.16), определяемого из $(L - v_j t)^2/4\sigma_x^2 \gtrsim 1$, относительное изменение члена, ответственного за расплывание пакета, t/τ_j^d мало:

$$\frac{t}{\tau_i^d} \lesssim \frac{(L - 2\sigma_x)m_j^2}{p^2 E_j(p)\sigma_x^2} \ll 1 \quad (3.21)$$

для разумных значений масс нейтрино $m_j \lesssim 1\text{eV}$, что подтверждается данными из космологии [8], и ширин пакетов в координатном пространстве.

Проведя интегрирования по ненаблюдаемым степеням свободы и убедившись в выполнении условия нормировки $\sum_{\beta} P_{\alpha\beta}(L) = 1$, получаем окончательное выражение для вероятности осцилляций:

$$P_{\alpha\beta}(L) = \sum_{i,j} \frac{V_{i\beta}^{\dagger} V_{\alpha i} V_{j\alpha}^{\dagger} V_{\beta j}}{\sqrt[4]{1 + (L/L_{ij}^d)^2}} \exp \left[-\frac{1}{1 + (L/L_{ij}^d)^2} \left(\frac{L}{L_{ij}^{\text{coh}}} \right)^2 - D_{ij}^2 \right] e^{-i(\varphi_{ij} + \varphi_{ij}^d)}. \quad (3.22)$$

Здесь мы ввели характерные длины, отвечающие за разные режимы поведения осцилляций:

$$L_{ij}^{\text{osc}} = 2\pi \frac{2p}{\Delta m_{ij}^2}, \quad L_{ij}^{\text{coh}} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_p \Delta v_{ij}} = \frac{2\sqrt{2}p^2}{\sigma_p \Delta m_{ij}^2} = \frac{p}{\sqrt{2}\pi\sigma_p} L_{ij}^{\text{osc}}, \quad (3.23)$$

$$L_{ij}^d = \frac{1}{\sigma_p^2} \frac{1}{\left| \frac{\partial \Delta v_{ij}}{\partial p} \right|} = \frac{p^3}{\sigma_p^2 \Delta m_{ij}^2} = \frac{p}{2\sqrt{2}\sigma_p} L_{ij}^{\text{coh}}, \quad (3.24)$$

где $\Delta v_{ij} = v_i - v_j$ - разность групповых скоростей пакетов (3.15), относящихся к разным массовым состояниям. Появилась добавочная фаза по сравнению с плосковолновым случаем:

$$\varphi_{ij}(L) = 2\pi \frac{L}{L_{ij}^{\text{osc}}}, \quad (3.25)$$

$$\varphi_{ij}^d(L) = -\frac{1}{1 + (L/L_{ij}^d)^2} \left(\frac{L}{L_{ij}^{\text{coh}}} \right)^2 \frac{L}{L_{ij}^d} + \frac{1}{2} \arctan \frac{L}{L_{ij}^d}, \quad (3.26)$$

где $\varphi_{ij}(L)$ - это обычная осцилляционная фаза, а $\varphi_{ij}^d(L)$ учитывает изменение фазы за счёт расплывания пакетов. Дополнительный подавляющий фактор:

$$D_{ij}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{4\sigma_p p} \right)^2 \quad (3.27)$$

становится существенным в случае, когда неопределённость импульсов в пакете меньше разницы квадратов масс. Это соответствует тому, что массовые состояния рождаются некогерентно и детектируется конкретное массивное состояние. Заметим, что в плосковолновом пределе $\sigma_p \rightarrow 0$ этот член также подавляет осцилляции. Приведём физический смысл и характерные масштабы длин в (3.23), взяв для примера $\Delta m_{21}^2 = 7.53 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2$, $E = 4 \text{ МэВ}$, $\sigma_p \sim 1 \text{ эВ}$:

- Длина осцилляций L_{ij}^{osc} та же длина, характеризующая период флейворных осцилляций, что в вакуумном случае. Для значений параметров, приведённых выше $L_{21}^{\text{osc}} = 131.7$ км.
- L_{ij}^{coh} соответствует характерному расстоянию, при котором осцилляции подавляются. Этот эффект называется декогеренцией по аналогии, происходит из-за различия групповых скоростей v_i пакетов, что приводит к постепенному увеличению расстояния между центрами пакетов по мере распространения. Когерентность разрушается, когда расстояние между пакетами центрами превысит ширину каждого из них σ_x , пакеты перестанут перекрываться. Исходя из определения групповой скорости легко оценить характерную дистанцию, когда это произойдёт:

$$L \gg \frac{2E^2\sigma_x}{\Delta m_{ij}^2} \sim 10^8 \text{ км.} \quad (3.28)$$

- Длина расплывания L_{ij}^{d} характеризует расстояние распространения необходимое для того, чтобы расплывание пакетов и связанное с ними частичное восстановление когерентности стало существенным, $L_{ij}^{\text{d}} \sim 30$ пс

Заметим, что формула (3.22) может быть получена эквивалентным образом, если сначала вероятность усреднить по времени (3.20) и только потом брать импульсный интеграл:

$$P_{\alpha\beta}(L) = \sum_{i,j} V_{i\beta}^\dagger V_{\alpha i} V_{j\alpha}^\dagger V_{\beta j} \int dt \int \frac{dk dq}{(2\pi)^2} f^*(q; p_d) f(k; p_s) e^{-i(E_i(k) - E_j(q))t + i(k-q)L} \quad (3.29)$$

Интегрирование по времени даёт две δ -функции:

$$\delta(E_i(k) - E_j(q)) = v_j(q) [\delta(q - q_0(k)) + \delta(q + q_0(k))], \quad (3.30)$$

где

$$q_0 \approx \sqrt{p^2 + \Delta m_{ij}^2} \left(1 + \frac{p}{p^2 + \Delta m_{ij}^2} (k - p) + \frac{\Delta m_{ij}^2}{2(p^2 + \Delta m_{ij}^2)^{\frac{3}{2}}} (k - p)^2 \right). \quad (3.31)$$

Вклад от $\delta(q + q_0(k))$ экспоненциально подавлен из-за гауссовых формфакторов в (3.29). Выпишем явно экспоненту, получающуюся после снятия оставшейся δ -функции, опустив матрицы смешивания и нормировки:

$$P_{\alpha\beta}(L) \propto \exp \left[-\frac{(k-p)^2}{4\sigma^2} - \frac{\left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{2p}\right)^2 + \frac{\Delta m_{ij}^2(k-p)}{p} + \frac{(k-p)^2}{p^2}(p^2 + \Delta m_{ij}^2)}{4\sigma^2} + \right. \\ \left. + iL \left(-\frac{\Delta m_{ij}^2}{2p} + \frac{\Delta m_{ij}^2(k-p)}{2p^2} - \frac{(k-p)^2 \Delta m_{ij}^2}{2p^3} \right) \right] \quad (3.32)$$

После снятия δ -функции оставшийся интеграл по импульсам также будет гауссовым, беря его и отбрасывая члены, содержащие высшие степени Δm_{ij}^2 ввиду их малости, получаем формулу (3.22).

3.2 Теоретические ограничения на импульсные ширины пакетов

По построению ширина волнового пакета в (3.10) должна быть соответствовать пространственной локализации области рождения нейтрино. Но теоретически оценить её получается только в некоторых случаях.

Например для нейтрино, рождающихся при распадах свободных частиц со временем жизни τ_x , ширина пакета может быть оценена как:

$$\sigma_x^\nu \sim \tau_x \gamma, \quad \gamma = \frac{E}{m} \quad (3.33)$$

Для распада $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ при энергии пиона в 1 ГэВ $\sigma_x^\nu \sim 70$ м, а в системе покоя пиона $\sigma_p^\nu \sim 10^{-8}$ эВ.

Для распадов $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ в системе покоя антимюона импульсная ширина $\sigma_p^\nu \sim 10^{-10}$ эВ ($\tau_\mu/\tau_\pi \sim 10^2$).

Но в реальности необходимо учитывать рассеяние частицы-источника в среде. Для оценки времени формирования нейтринного пакета, как выше было использовано время жизни частицы, можно использовать среднее время

между столкновениями:

$$\tau_i = \frac{l_i}{v}, \quad \sigma_x \sim \min_i [\tau_i] \quad (3.34)$$

где l_i - средняя длина свободного пробега при рассеянии на частицах i -го сорта, составляющих среду.

Например, для распада покоящегося пиона в графите (в реальности пион не покоится, а имеет кинетическую энергию порядка тепловой $T_\pi \approx 4 \cdot 10^{-2}$ эВ) ширина нейтринного волнового пакета определяется наименьшей длиной свободного пробега среди π^+ и μ^+ . Длина пробега для пиона меньше, порядка расстояния между атомами в графите $2 \cdot 10^{-10}$ м, что приводит к оценке для ширины нейтринного волнового пакета $\sigma_x \simeq 10^{-3}$ см.

Для распада мюона в графите $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ определяющей является длина свободного пробега позитрона $2 \cdot 10^{-10}$ м, что с учётом того, что позитрон ультрарелятивистский даёт $\sigma_x \simeq 2 \cdot 10^{-8}$ см.

На формирование нейтринного волнового пакета также может оказывать серьёзное влияние магнитное поле в источнике, что существенно в астрофизических источниках [43]. Также более последовательный учёт влияния вещества на формирование волновых пакетов для распадов пионов в распадных трубах, в случае важном для изучения ускорительных нейтрино, был проведён в работе [44].

Для солнечных нейтрино, рождающихся в $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$ оценки за счёт естественной ширины линий и среднего времени между столкновениями дают $\sigma_p \sim 10^{-3} - 10^3$ эВ. Для реакторных антинейтрино, рождающихся при распадах тяжёлых ядер, сложно сделать аналогичную оценку, не опирающуюся на знание волновых функций ядер.

К сожалению, всё что мы можем сказать об импульсных ширинах нейтринных волновых пакетов является лишь оценками. На сегодняшний день отсутствуют самосогласованные методы, позволяющие вычислять их из первых принципов.

Несмотря на то, что чувствительности к декогерентности для реактор-

ных экспериментов изучались [45], реальные экспериментальные ограничения впервые были недавно поставлены в экспериментах Daya Bay и KamLAND, результаты готовятся к публикации. На рис. 3.1 приведены вероятности выживания электронного антинейтрино при нескольких значениях σ_p , расстояние $L = 60$ км соответствует эксперименту JUNO. Ожидаемая чувствительность JUNO к иерархии масс нейтрино может быть существенно ослаблена декогеренцией. Ввиду этого вопрос о возможности экспериментального изучения декогеренции встаёт с особой силой.

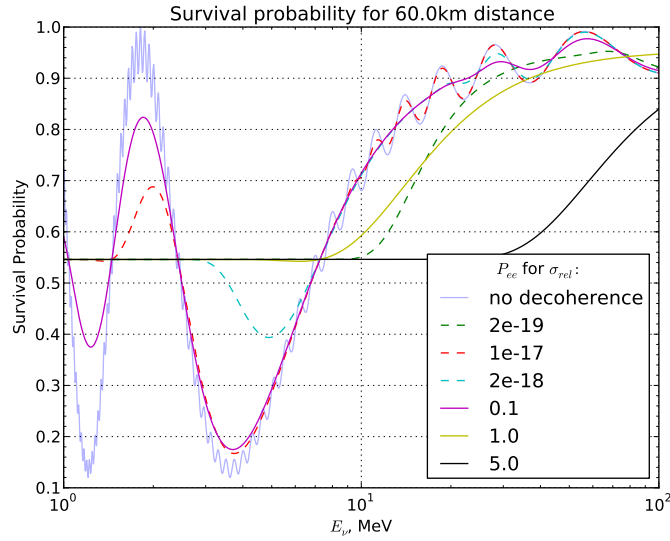


Рис. 3.1: Вероятность выживания для $\bar{\nu}_e$ как функция E_ν при фиксированном расстоянии $L = 60$ км для некоторых относительных ширин волнового пакета $\sigma_{rel} = \sigma_E/E_\nu$.

Из (3.23) следует, что при разумных значениях σ_p для наблюдения декогеренции необходимо, чтобы на расстоянии между источником и детектором укладывалось много длин осцилляций $L \gg L^{osc}$.

Это требование заведомо выполняется в атмосферных и тем более в солнечных экспериментах, ввиду длин базы характерных для данных экспериментов. Эффекты декогеренции могут быть особенно заметны в солнечных экспериментах из-за огромного расстояния между Землёй и Солнцем.

Но анализ этих экспериментов усложнен необходимостью построения тео-

рии нейтринных осцилляций в веществе с переменной плотностью, включающей волновые пакеты.

Глава 4

Нейтринные осцилляции с волновыми пакетами в веществе

4.1 MSW-эффект

Как мы видели в разделе 2.2 влияние вещества существенно изменяет картину осцилляций. В настоящее время известно небольшое количество работ, где исследуются влияние эффектов вещества на осцилляции нейтрино с учётом волновых пакетов [46–48]. В работе [46] использовано адиабатическое приближение для получения вероятностей осцилляций, но отсутствует член D_{ij}^2 , ответственный за локализацию состояний. В работе [47] был исследован случай осцилляций в веществе с постоянной плотностью. Феноменологический подход с использованием матрицы плотности использован в [48].

В этом разделе изложена развитая нами теория нейтринных осцилляций в веществе с переменной плотностью, подходящая для описания MSW-эффекта для солнечных нейтрино, не представленная, насколько нам известно, ранее в литературе. Мы будем использовать одномерное приближение в силу тех же причин, что и в вакуумном случае. Поскольку двухнейтринная схема слу-

жит хорошим приближением полной картины MSW-эффекта для солнечных нейтрино, мы также будем использовать её.

Гамильтониан, описывающий взаимодействие нейтрино с веществом, записанный во флейворном базисе в импульсном представлении имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{2E} & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2}{2E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}G_F n_e(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Соответствующее уравнение Шрёдингера:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\nu(t)\rangle = \hat{H} |\nu(t)\rangle \quad (4.2)$$

может быть решено в адиабатическом приближении, оправданном при распространении нейтрино в Солнце (2.28):

$$\langle \tilde{\nu}_j(t; p) | \nu(t) \rangle = \exp \left(-i \int_{t_0}^t d\tau \tilde{E}_j(\tau; p) \right) \langle \tilde{\nu}_j(t_0; p) | \nu(t_0) \rangle. \quad (4.3)$$

Волновой пакет является суперпозицией массовых состояний с определённым импульсом. Выражение (2.30) в адиабатическом приближении определяет эволюцию каждого такого состояния. В силу линейности уравнения Шрёдингера состояния, входящие в волновой пакет будут эволюционировать независимо. Зададим состояние с определённым флейвором α , родившееся в источнике, в виде волнового пакета:

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha(t_0; p_s)\rangle &= \sum_i \int \frac{dk}{2\pi} f_s(k; p_s, \sigma_s) V_{\alpha i} |\nu_i(k)\rangle = \\ &= \sum_j \int \frac{dk}{2\pi} f_s(k; p_s, \sigma_s) U_{\alpha j}(x(t_0); p) |\tilde{\nu}_j(t_0; k)\rangle. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Мы параметризуем формфактор в гауссовой форме, подобной (3.10). Ширина и средний импульс пакета определяются процессами рождения и детектирования, как обсуждалось в секции 3.2.

После адиабатической эволюции проекция состояния (4.4) на состояние с определённой массой в веществе будет иметь вид:

$$\langle \tilde{\nu}_j(t; k) | \nu_\alpha(t, t_0; p_s) \rangle = f_s(k; p_s, \sigma_s) U_{\alpha j}(x(t_0); k) \exp \left(-i \int_{t_0}^t d\tau \tilde{E}_j(\tau; k) \right) \quad (4.5)$$

Детекторное состояние с флейвором β :

$$\begin{aligned} |\nu_d(p_d)\rangle &= \int \frac{dq}{2\pi} f_d(q; p_d, \sigma_d, L) V_{\beta i} |\nu_i(q)\rangle = \\ &= \int \frac{dq}{2\pi} f_d(q; p_d, \sigma_d, L) U_{\beta i}(x(t); q) |\tilde{\nu}_i(t; q)\rangle. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Фактор $\exp(ikL)$, $L = |x_d - x_s|$ помещён в $f_d(q; p_d, \sigma_d, L)$.

Теперь используя соотношение нормировки для массовых состояний с веществом $\langle \tilde{\nu}_i(t; p) | \tilde{\nu}_j(t; k) \rangle = 2\pi \delta_{ij} \delta(k - p)$, получаем амплитуду перехода:

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}(L; t, t_0) &= \sum_j \int \frac{dk}{2\pi} f_d^*(k; p_d, \sigma_d, L) f_s(k; p_s, \sigma_s) \times \\ &\times U_{j\beta}^\dagger(x(t), k) U_{\alpha j}(x(t_0), k) \exp \left(-i \int_{t_0}^t d\tau \tilde{E}_j(\tau; k) \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Важной деталью является то, что матрицы смешивания явно зависят от энергии (2.14) и точки рождения нейтрино. Для солнечных экспериментов эффекты вещества в детекторе не существенны и матрицы смешивания являются вакуумными $U_{j\beta}^\dagger(x(t), k) = V_{j\beta}^\dagger$:

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}(L; t, t_0) &= \sum_i \int \frac{dk}{2\pi} f_d^*(k; p_d, \sigma_d) f_s(k; p_s, \sigma_s) \times \\ &\times V_{j\beta}^\dagger U_{\alpha j}(x(t_0), k) \exp \left(-i \int_{t_0}^t d\tau \tilde{E}_j(\tau; k) \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Для взятия интеграла по импульсу разложим собственное значение гамильтониана в веществе вблизи среднего импульса в пакете аналогично (3.15):

$$\tilde{E}_j(\tau; k) = \tilde{E}_j(\tau; p) + \tilde{v}_j(\tau; p) (k - p) + \frac{1}{2} \tilde{v}'_j(\tau; p) (k - p)^2. \quad (4.9)$$

Мы считаем, что пакет достаточно узок, что матрицы смешивания можно вынести из-под интегрирования при среднем импульсе в пакете. Вводя обозначения:

$$\sigma_i^2(t, p) = \frac{1}{4\sigma_0^2} + i\frac{1}{2} \int_{t_0}^t d\tau \tilde{v}'_j(\tau; p), \quad D_i(t, p) = L - \int_{t_0}^t d\tau \tilde{v}_i(\tau; p), \quad (4.10)$$

получаем и выписывая явно нормировочные факторы:

$$A_{\alpha\beta}(L; t, t_0) = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma_s^2 + \sigma_d^2}} \exp \left[-\frac{(p_s - p_d)^2}{4(\sigma_s^2 + \sigma_d^2)} \right] V_{i\beta}^\dagger U_{\alpha i}(x(t_0); p). \quad (4.11)$$

$$\exp \left[+iLp - i \int_{t_0}^t d\tau \tilde{E}_i(p; \tau) - \frac{D_i^2(t, p)}{4\sigma_i^2(t, p)} \right]. \quad (4.12)$$

Для получения наблюдаемых величин, необходимо усреднить $|A_{\alpha\beta}(L; t, t_0)|^2$ по времени распространению и импульсу в источнике подобно (3.20). Для того вычислить интеграл по времени воспользуемся методом перевала. Его применение приводит к необходимости решать уравнение:

$$\left(L - \int_{t_0}^t d\tau v_i(\tau, p) \right) v_i(t; p) + \left(L - \int_{t_0}^t d\tau v_j(\tau, p) \right) v_j(t; p) = 0 \quad (4.13)$$

1 Для того, чтобы выяснить влияния вещества на время распространения нейтрино от источника в Солнце до детектора на Земле, положим что нейтрино родилось в центре Солнца. Используя явный вид собственного значения гамильтониана (2.13) $\tilde{E}_j(\tau, p) = p + \frac{\tilde{m}_j^2}{2p}$ запишем выражение для интеграла от групповой скорости по траектории распространения, взяв $t_0 = 0$:

$$\int_0^t d\tau \tilde{v}_i(\tau, p) = v_i t + \Delta_i, \quad \Delta_i = (-1)^i \frac{\Delta m^2}{4p} \left(\frac{\partial \delta}{\partial p} - \frac{\delta}{p} \right), \quad (4.14)$$

$$\delta = r_0 \left(\cos 2\theta \ln \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{ap - \cos 2\theta + f(0)} \right) + \ln \left(\frac{2}{1 - ap \cos 2\theta + f(0)} \right) + f(0) - 1 \right),$$

$$a = \frac{2\sqrt{2}G_F N_e}{\Delta m^2}, \quad f(t) = \sqrt{a^2 p^2 \exp\left[-\frac{2t}{r}\right] - 2ap \cos 2\theta \exp\left[-\frac{t}{r}\right] + 1}, \quad (4.15)$$

где v_i - групповые скорости в вакууме. Подставляя этот результат в (4.13) находим время распространение нейтрино (седловую точку):

$$t = \frac{L}{v_{ij}} \left(1 - \frac{\Delta_i v_i + \Delta_j v_j}{L(v_i + v_j)} \right) = \frac{L}{v_{ij}} (1 - \omega_{ij}) \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{v_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_i} + \frac{1}{v_j} \right) \quad (4.17)$$

Это относительная разница этого времени от вакуумного 10^{-21} . Таким образом вещество практически не влияет на время распространения нейтрино и его можно считать вакуумным в дальнейшем.

Учитывая это, представляется разумным вероятность, получаемую из (4.11), $|A_{\alpha\beta}(L; t, t_0)|^2$ сначала усреднить по времени распространения, и только потом интегрировать по импульсам в пакете.

Ввиду того, что при распространении от Солнца до Земли, влияние материи существенно только на небольшом участке траектории распространения и не изменяет практически время распространения по сравнению с вакуумным случаем, то разумно выделить из собственных значений гамильтониана (2.13) вклады, присутствующие в вакуумном случае и индуцированные влиянием вещества:

$$\int_{t_0}^t d\tau \tilde{E}_{1,2}(\tau; p) = E_{1,2}(p)(t - t_0) \mp \frac{1}{2p} \delta(p, t, t_0), \quad (4.18)$$

$$\delta(p, t, t_0) = \Delta m^2 \left(\int_{t_0}^t d\tau \sqrt{\left(\frac{A(\tau)}{\Delta m^2} - \cos 2\theta \right)^2 + \sin^2 2\theta} - (t - t_0) \right). \quad (4.19)$$

Заметим, что из-за наличия вещества только на небольшом участке траектории $\delta(p, t, t_0)$ на самом деле не зависит явно от времени распространения, что позволяет провести усреднение по времени распространения в явном виде, аналогично (3.32), вместе с интегрированием по импульсу p_s (\dots обозначает

подэкспоненциальное выражение из (3.32)):

$$P_{\alpha\beta}(L; x(t_0)) = \sum_{i,j} V_{i\beta}^\dagger V_{\beta j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} U_{j\alpha}^\dagger(x(t_0), p) U_{\alpha i}(x(t_0), p) \exp \left[\dots - i\epsilon_{ij} \frac{\delta(p, t_0)}{2p} \right], \quad (4.20)$$

где ϵ - символ Леви-Чивита. Вычисляя оставшийся интеграл по импульсу, вынося матрицы смешивания при среднем импульсе в пакете из под интеграла, получаем выражение для вероятности:

$$P_{\alpha\beta}(L; x(t_0)) = \sum_{i,j} \frac{V_{i\beta}^\dagger V_{\beta j} U_{j\alpha}^\dagger(p, x(t_0)) U_{\alpha i}(p, x(t_0))}{\sqrt[4]{1 + \left(L/\tilde{L}_{ij}^d \right)^2}} \cdot \exp \left[-D_{ij}^2 - i\tilde{\varphi}_{ij} - i\tilde{\varphi}_{ij}^d - \left(\frac{L}{\tilde{L}_{ij}^{\text{coh}}} \right)^2 \frac{1}{1 + \left(L/\tilde{L}_{ij}^d \right)^2} \right]. \quad (4.21)$$

В то время как член D_{ij}^2 , ответственный за локализацию, остался неизменным по сравнению с вакуумным случаем (3.27), все характерные длины (3.23) изменились, став функциями траектории нейтрино подобно (2.32):

$$\tilde{L}_{ij}^{\text{osc}} = \frac{L_{ij}^{\text{osc}}}{1 + \frac{\delta(p, x(t_0))}{L}}, \quad \tilde{L}_{ij}^{\text{coh}} = \frac{L_{ij}^{\text{coh}}}{1 - \frac{p^2}{L} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\delta(p, x(t_0))}{p} \right)}, \quad (4.22)$$

$$\tilde{L}_{ij}^d = \frac{L_{ij}^d}{1 + \frac{p^3}{L} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \left(\frac{\delta(p, x(t_0))}{p} \right)}. \quad (4.23)$$

Необходимо отметить, что это согласуется с результатами для $\tilde{L}_{ij}^{\text{osc}}$, $\tilde{L}_{ij}^{\text{coh}}$ полученными в [46]:

$$\tilde{L}_{ij}^{\text{osc}} = \frac{4\pi p L}{\int_0^L d\tau \Delta \tilde{m}_{ij}^2(\tau)}, \quad \tilde{L}_{ij}^{\text{coh}} = \frac{2\sqrt{2}\sigma_x L}{\left| \int_0^L d\tau \Delta \tilde{v}_{ij}(\tau) \right|} \quad (4.24)$$

Если мы хотим учесть зависимость элементов матрицы смешивания (2.14) от энергии, то разлагая $U_{j\alpha}^\dagger U_{\alpha i}(x(t_0), p)$ в ряд Тейлора вблизи p до квадратичного члена, получаем асимптотическое разложение:

$$\begin{aligned}
P_{\alpha\beta}(L; x(t_0)) = & \sum_{ij} \frac{V_{\beta i}^\dagger V_{\beta j}}{\sqrt[4]{1 + (L/\tilde{L}_{ij}^d)^2}} \exp \left[-D_{ij}^2 - \tilde{\varphi}_{ij} - \tilde{\varphi}_{ij}^d - \left(\frac{L}{L_{ij}^{\text{coh}}} \right)^2 \frac{1}{1 + (L/\tilde{L}_{ij}^d)^2} \right] \cdot \\
& \cdot \left(U_{i\alpha} U_{\alpha j}^\dagger(x(t_0), p) - \sqrt{2}\sigma \frac{\partial(U_{i\alpha} U_{\alpha j}^\dagger)}{\partial p} \cdot \frac{iL/\tilde{L}_{ij}^{\text{coh}} + L^2 / (\tilde{L}_{ij}^{\text{coh}} \tilde{L}_{ij}^d)}{1 + (L/\tilde{L}_{ij}^d)^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2(U_{i\alpha} U_{\alpha j}^\dagger)}{\partial p^2} \left[\frac{1 - i\frac{L}{\tilde{L}_{ij}^d}}{1 + (L/\tilde{L}_{ij}^d)^2} + 2 \frac{\left(\frac{L^2}{\tilde{L}_{ij}^{\text{coh}} \tilde{L}_{ij}^d} \right)^2 - \left(\frac{L}{\tilde{L}_{ij}^{\text{coh}}} \right)^2 + 2i \left(\frac{L}{\tilde{L}_{ij}^{\text{coh}}} \right)^2 \frac{L}{\tilde{L}_{ij}^d}}{\left[1 + (L/\tilde{L}_{ij}^d)^2 \right]^2} \right] \right) \quad (4.25)
\end{aligned}$$

4.2 Возможность постановки экспериментальных ограничений из солнечных данных

Нейтрино рождаются в Солнце в результате реакций (таб. 1.1) сферически симметрично [33]. Функции распределения, характеризующие вероятность для нейтрино родиться на заданном расстоянии от центра Солнца, определяются следующим образом $g_i(r, E) = \frac{d\Phi_i(r, E)}{dr}$, где $\Phi_i(r, E)$ - поток нейтрино с энергией E , рождающихся на расстоянии r от центра Солнца в i -ой реакции. На рис. 4.1 приведены некоторые полезные нам функции распределения рождения нейтрино для модели Солнца ВР2000 [33]. Ввиду того, нельзя определить точное место рождения нейтрино в Солнце, необходимо усреднять по всей возможной области рождения, чтобы получить экспериментально наблюдаемые величины.

$$\langle P_{\alpha\beta}(L, E) \rangle = \frac{\int d\mathbf{x}_p g(\mathbf{x}_p, E) P_{\alpha\beta}(L, \mathbf{x}_p, E)}{\int d\mathbf{x}_p g(\mathbf{x}_p, E)} \quad (4.26)$$

При таком усреднении (4.21) в энергетическом спектре (рис. 1.1) проявляются три характерных области:

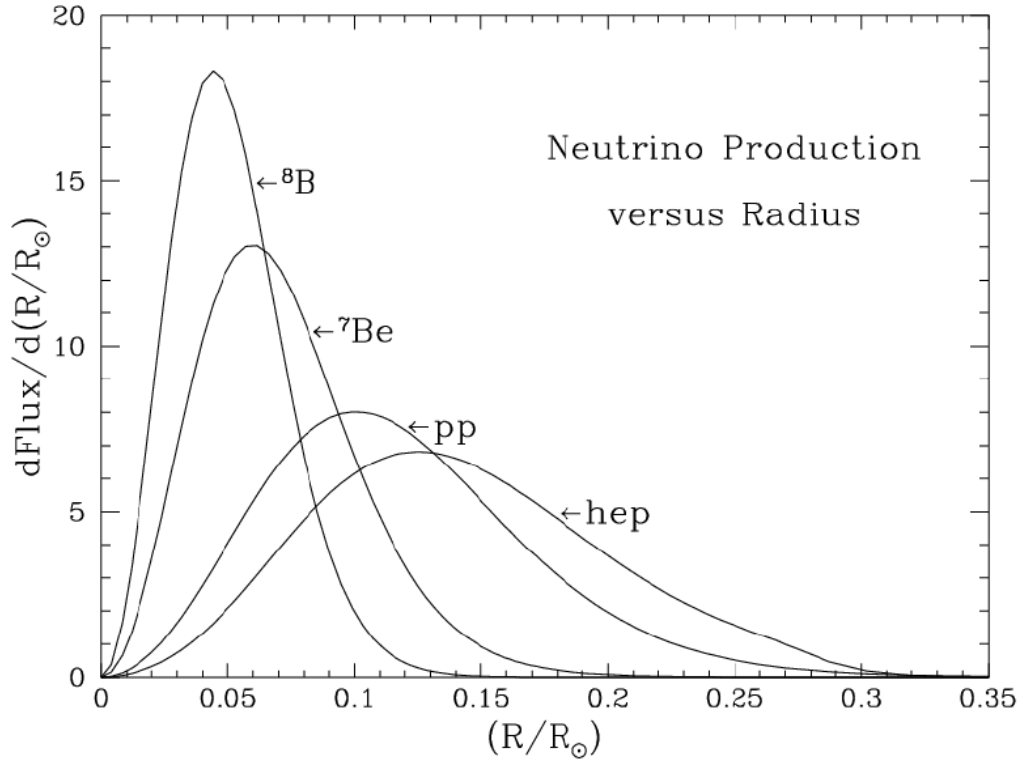


Рис. 4.1: Функции распределения рождения нейтрино.

- При $E < 1$ МэВ. В этом диапазоне энергии осцилляции влияния вещества на осцилляции мало и осцилляции являются вакуумными. В эту область попадают нейтрино от pp , ${}^7\text{Be}$ и другие. При усреднении интерференционный вклад зануляется и вероятность $\langle P_{ee} \rangle = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta$. Таким образом нельзя извлечь никакой информации о декогеренции.
- Область $E \simeq 2 - 3$ МэВ соответствует MSW-резонансу, в неё попадают нейтрино от ${}^8\text{B}$, hep , pep реакций. Здесь смешивание максимально и после усреднения $\langle P_{ee} \rangle = \frac{1}{2}$, так что в этой области тоже нет чувствительности к эффектам декогеренции.
- В области $E > 4 - 5$ МэВ влияние вещества существенно изменяет картину осцилляций. В эту область попадают только нейтрино от ${}^8\text{B}$ и hep реакций. В этой области осцилляции существенно модифицируются влиянием вещества и в плосковолновом случае после усреднения $\langle P_{ee} \rangle = \cos^2 \theta$.

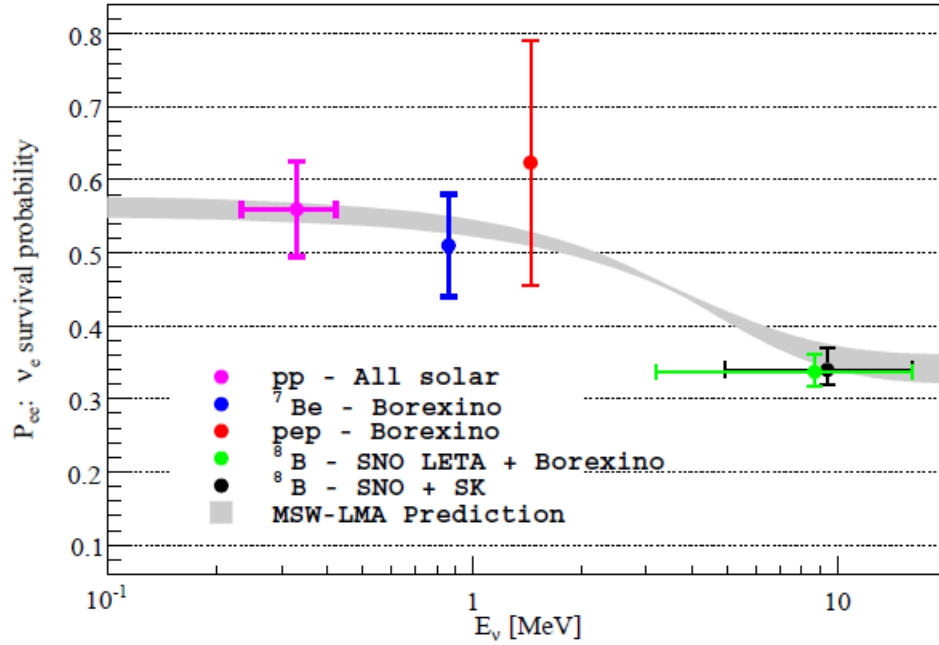


Рис. 4.2: Экспериментальные измерения вероятностей выживания вместе с теоретическими предсказаниями (LMA).

Но зависимость матриц смешивания от импульса нейтрино (рис. 2.1 и 2.2) может привести к отклонению вероятности от “плосковолновой” величины после усреднения. При усреднении (4.25) с функцией распределения для борных нейтрино (рис. 4.1) все интерференционные члены исчезают: фазовые множители, модифицированные влиянием вещества, являются быстро осциллирующими функциями и при численном интегрировании методом Левина

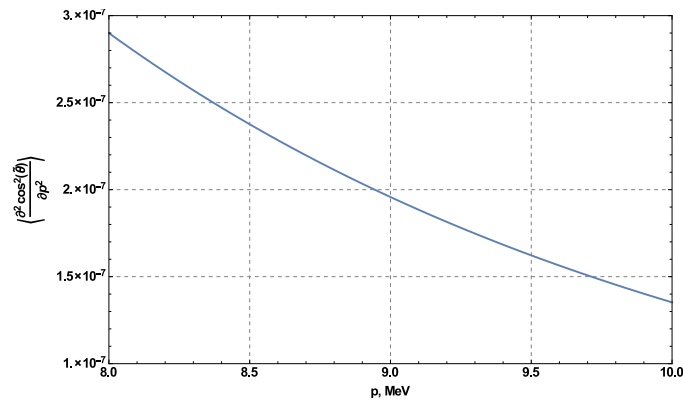


Рис. 4.3: Зависимость $\langle \frac{\partial^2 \cos^2 \tilde{\theta}}{\partial p^2} \rangle$ от импульса нейтрино.

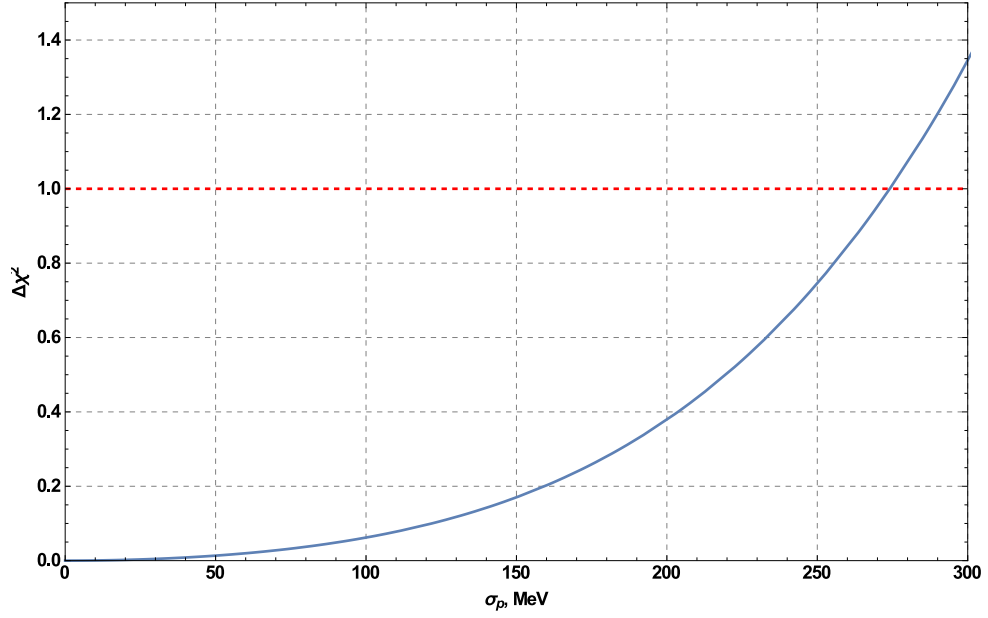


Рис. 4.4: Профиль $\Delta\chi^2(\sigma_p)$.

их вклад равен нулю, как и в вакуумном случае. В результате усреднённая вероятность имеет вид:

$$\begin{aligned} \langle P_{ee}(L, E) \rangle = & \cos^2 \theta \left(\langle \cos^2 \tilde{\theta} \rangle + \frac{\sigma^2}{2} \left\langle \frac{\partial^2 \cos^2 \tilde{\theta}}{\partial p^2} \right\rangle \right) + \\ & + \sin^2 \theta \left(\langle \sin^2 \tilde{\theta} \rangle + \frac{\sigma^2}{2} \left\langle \frac{\partial^2 \sin^2 \tilde{\theta}}{\partial p^2} \right\rangle \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Средние значения производных в (4.27) имеют порядок величины 10^{-7} МэВ^{-2} (рис. 4.3). В этой области энергетического спектра измерены вероятности P_{ee} для борных нейтрино [49] (рис. 4.2). Используем статистику χ^2 для оценки верхнего предела для σ_p .

Минимум χ^2 находится при $\sigma_p = 0$, что соответствует отсутствию декогеренции и значение в нём $\chi^2(0) = 0.088$. Профиль $\Delta\chi^2 = \chi^2(\sigma_p) - \chi^2(0)$ изображён на рис. 4.4. На уровне достоверности 68.3% верхняя граница для ширины волнового пакета $\sigma_{\text{up}} = 274 \text{ МэВ}$. Необходимо отметить, что приближение узкого пакета, использованное при построении теории, перестаёт выполняться при гораздо меньших значениях σ_p . Это указывает на то, что

данные солнечных экспериментов не позволяют поставить хорошего ограничения на ширины волновых пакетов.

Заключение

Подавление нейтринных осцилляций, связанное с расхождением волновых пакетов при распространении, - декогеренция, остаётся практически не изученным экспериментально на текущий момент.

Для изучения декогеренции в экспериментах с солнечными нейтрино была разработана квантово-механическая теория нейтринных осцилляций в веществе с переменной плотностью, включающая описание нейтрино в виде волновых пакетов, ранее не представленная в литературе. Было промоделировано распространение нейтрино от Солнца до Земли и изучено влияние вещества на нейтринные осцилляции. Исследована возможная чувствительность к декогеренции и показано, что в результате усреднения по области рождения нейтрино, чувствительность значительно теряется. Вкупе с исследованием влияния декогеренции на асимметрию день-ночь, описанном в приложении, это позволяет считать, что на текущем уровне точности солнечных экспериментов нельзя поставить разумных ограничений на ширины волновых пакетов.

Работа была представлена на совещании коллаборации Daya Bay. В дальнейшем планируется подготовить работу к публикации и изучить чувствительности к декогеренции экспериментов с атмосферными и ускорительными нейтрино, в которых эффекты усреднения менее выражены.

Литература

- [1] Pontecorvo B. Inverse beta process // Camb.Monogr.Part.Phys.Nucl.Phys.Cosmol. — 1991. — Vol. 1. — P. 25–31.
- [2] Detection of the free neutrino: A Confirmation / C.L. Cowan, F. Reines, F.B. Harrison et al. // Science. — 1956. — Vol. 124. — P. 103–104.
- [3] Feynman R., Gell-Mann M. Theory of Fermi interaction // Phys.Rev. — 1958. — Vol. 109. — P. 193–198.
- [4] Vysotsky M. Lectures on the theory of electroweak interactions // Phys.Part.Nucl.Lett. — 2011. — Vol. 8. — P. 617–650.
- [5] Maki Z., Nakagawa M., Sakata S. Remarks on the unified model of elementary particles // Prog.Theor.Phys. — 1962. — Vol. 28. — P. 870–880.
- [6] An F. et al. Observation of electron-antineutrino disappearance at Daya Bay // Phys.Rev.Lett. — 2012. — Vol. 108. — P. 171803. — 1203.1669.
- [7] Olive K. et al. Review of Particle Physics // Chin.Phys. — 2014. — Vol. C38. — P. 090001.
- [8] Ade P. et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters // Astron.Astrophys. — 2014. — Vol. 571. — P. A16. — 1303.5076.
- [9] Hasert F. et al. Observation of Neutrino Like Interactions Without Muon Or Electron in the Gargamelle Neutrino Experiment // Phys.Lett. — 1973. — Vol. B46. — P. 138–140.

- [10] Schael S. et al. Precision electroweak measurements on the Z resonance // Phys.Rept. — 2006. — Vol. 427. — P. 257–454. — hep-ex/0509008.
- [11] Spectroscopy of Solar Neutrinos / Michael Wurm, Franz von Feilitzsch, Marianne Goeger-Neff et al. // Astron.Nachr. — 2010. — Vol. 331. — P. 512. — 1004.0831.
- [12] Grevesse N., Sauval A. J. Standard Solar Composition // Space Sci.Rev. — 1998. — Vol. 85. — P. 161–174.
- [13] Davis Raymond J., Harmer D. S., Hoffman K. C. Search for neutrinos from the sun // Phys.Rev.Lett. — 1968. — Vol. 20. — P. 1205–1209.
- [14] Ahmad Q. et al. Measurement of the rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ interactions produced by 8B solar neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory // Phys.Rev.Lett. — 2001. — Vol. 87. — P. 071301. — nucl-ex/0106015.
- [15] Renshaw A. et al. First Indication of Terrestrial Matter Effects on Solar Neutrino Oscillation // Phys.Rev.Lett. — 2014. — Vol. 112, no. 9. — P. 091805. — 1312.5176.
- [16] Ahmad Q. et al. Measurement of day and night neutrino energy spectra at SNO and constraints on neutrino mixing parameters // Phys.Rev.Lett. — 2002. — Vol. 89. — P. 011302. — nucl-ex/0204009.
- [17] Ahmad Q. et al. Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory // Phys.Rev.Lett. — 2002. — Vol. 89. — P. 011301. — nucl-ex/0204008.
- [18] D'Angelo D. Low Energy Neutrino Measurements // Pramana. — 2012. — Vol. 79. — P. 757–780. — 1211.5359.
- [19] Ludhova L., Zavatarelli S. Studying the Earth with Geoneutrinos. — 2013. — P. 425693. — 1310.3961.

- [20] Gando A. et al. Partial radiogenic heat model for Earth revealed by geoneutrino measurements // *Nature Geo.* — 2011. — Vol. 4. — P. 647–651.
- [21] Bellini G. et al. Observation of Geo-Neutrinos // *Phys.Lett.* — 2010. — Vol. B687. — P. 299–304. — 1003.0284.
- [22] Giunti C., Kim C. W. *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics.* — 2007.
- [23] Wolfenstein L. Neutrino Oscillations in Matter // *Phys.Rev.* — 1978. — Vol. D17. — P. 2369–2374.
- [24] Linder J. Derivation of neutrino matter potentials induced by earth // *Am.J.Phys.* — 2005. — hep-ph/0504264.
- [25] Pantaleone J. T. Dirac neutrinos in dense matter // *Phys.Rev.* — 1992. — Vol. D46. — P. 510–523.
- [26] Kartavtsev A., Raffelt G., Vogel H. Neutrino propagation in media: Flavor-, helicity-, and pair correlations. — 2015. — 1504.03230.
- [27] Sigl G., Raffelt G. General kinetic description of relativistic mixed neutrinos // *Nucl.Phys.* — 1993. — Vol. B406. — P. 423–451.
- [28] Akhmedov E. K., Wilhelm A. Quantum field theoretic approach to neutrino oscillations in matter // *JHEP.* — 2013. — Vol. 1301. — P. 165. — 1205.6231.
- [29] Botella F., Lim C., Marciano W. Radiative Corrections to Neutrino Indices of Refraction // *Phys.Rev.* — 1987. — Vol. D35. — P. 896.
- [30] Akhmedov E. K., Lunardini C., Smirnov A. Y. Supernova neutrinos: Difference of muon-neutrino - tau-neutrino fluxes and conversion effects // *Nucl.Phys.* — 2002. — Vol. B643. — P. 339–366. — hep-ph/0204091.
- [31] Balantekin A. Exact solutions for matter enhanced neutrino oscillations // *Phys.Rev.* — 1998. — Vol. D58. — P. 013001. — hep-ph/9712304.

- [32] Kuo T.-K., Pantaleone J. T. Nonadiabatic Neutrino Oscillations in Matter // *Phys.Rev.* — 1989. — Vol. D39. — P. 1930.
- [33] Bahcall J. N., Pinsonneault M., Basu S. Solar models: Current epoch and time dependences, neutrinos, and helioseismological properties // *Astrophys.J.* — 2001. — Vol. 555. — P. 990–1012. — astro-ph/0010346.
- [34] Taylor J. R. *Scattering Theory: The quantum Theory on Nonrelativistic Collisions.* — Wiley, New York, 1972.
- [35] Giunti C., Kim C., Lee U. When do neutrinos really oscillate?: Quantum mechanics of neutrino oscillations // *Phys.Rev.* — 1991. — Vol. D44. — P. 3635–3640.
- [36] Rich J. The Quantum mechanics of neutrino oscillations // *Phys.Rev.* — 1993. — Vol. D48. — P. 4318–4325.
- [37] Grossman Y., Lipkin H. J. Flavor oscillations from a spatially localized source: A Simple general treatment // *Phys.Rev.* — 1997. — Vol. D55. — P. 2760–2767. — hep-ph/9607201.
- [38] Beuthe M. Oscillations of neutrinos and mesons in quantum field theory // *Phys.Rept.* — 2003. — Vol. 375. — P. 105–218. — hep-ph/0109119.
- [39] Cardall C. Y. Coherence of neutrino flavor mixing in quantum field theory // *Phys.Rev.* — 2000. — Vol. D61. — P. 073006. — hep-ph/9909332.
- [40] Naumov D. V., Naumov V. A. Relativistic wave packets in a field theoretical approach to neutrino oscillations // *Russ.Phys.J.* — 2010. — Vol. 53. — P. 549–574.
- [41] Naumov D., Naumov V. A Diagrammatic treatment of neutrino oscillations // *J.Phys.* — 2010. — Vol. G37. — P. 105014. — 1008.0306.

- [42] Naumov D. On the Theory of Wave Packets // Phys.Part.Nucl.Lett. — 2013. — Vol. 10. — P. 642–650. — 1309.1717.
- [43] Farzan Y., Smirnov A. Y. Coherence and oscillations of cosmic neutrinos // Nucl.Phys. — 2008. — Vol. B805. — P. 356–376. — 0803.0495.
- [44] Jones B. Dynamical pion collapse and the coherence of conventional neutrino beams // Phys.Rev. — 2015. — Vol. D91, no. 5. — P. 053002. — 1412.2264.
- [45] Blennow M., Ohlsson T., Winter W. Damping signatures in future neutrino oscillation experiments // JHEP. — 2005. — Vol. 0506. — P. 049. — hep-ph/0502147.
- [46] Peltoniemi J., Sipilainen V. Neutrino propagation in matter using the wave packet approach // JHEP. — 2000. — Vol. 0006. — P. 011. — hep-ph/0004162.
- [47] Qin N., Ma B.-Q. Wave Packet Approach to Neutrino Oscillations with Matter Effects. — 2012. — 1206.0812.
- [48] Giunti C., Kim C., Lee U. Coherence of neutrino oscillations in vacuum and matter in the wave packet treatment // Phys.Lett. — 1992. — Vol. B274. — P. 87–94.
- [49] Bellini G. et al. First evidence of pep solar neutrinos by direct detection in Borexino // Phys.Rev.Lett. — 2012. — Vol. 108. — P. 051302. — 1110.3230.
- [50] Abe K. et al. Solar neutrino results in Super-Kamiokande-III // Phys.Rev. — 2011. — Vol. D83. — P. 052010. — 1010.0118.
- [51] Caccianiga B. Precision measurement of the Be-7 solar neutrino flux and its day-night asymmetry with Borexino // J.Phys.Conf.Ser. — 2012. — Vol. 375. — P. 042032.

- [52] Aharmim B. et al. Electron energy spectra, fluxes, and day-night asymmetries of B-8 solar neutrinos from measurements with NaCl dissolved in the heavy-water detector at the Sudbury Neutrino Observatory // *Phys.Rev.* — 2005. — Vol. C72. — P. 055502. — nucl-ex/0502021.
- [53] Blennow M., Ohlsson T., Snellman H. Day-night effect in solar neutrino oscillations with three flavors // *Phys.Rev.* — 2004. — Vol. D69. — P. 073006. — hep-ph/0311098.
- [54] Dziewonski A., Anderson D. Preliminary reference earth model // *Phys.Earth Planet.Interiors.* — 1981. — Vol. 25. — P. 297–356.
- [55] Bruss D., Sehgal L. Distinguishing a coherent from an incoherent mixture of neutrino flavor // *Phys.Lett.* — 1989. — Vol. B216. — P. 426.
- [56] Dighe A. S., Liu Q., Smirnov A. Y. Coherence and the day - night asymmetry in the solar neutrino flux. — 1999. — hep-ph/9903329.

Приложение А

Асимметрия день-ночь

Есть ещё один возможный способ изучения декогеренции по данным солнечных экспериментов связан с асимметрией день-ночь - разницей чисел событий, зарегистрированных в течении дня и ночи, наблюдаемой на эксперименте [50–52]:

$$A_{D-N} = 2 \frac{N_D - N_N}{N_D + N_N}. \quad (\text{A.1})$$

Обычно считается, что нейтрино пребывает на Землю в виде некогерентной смеси $|\nu_1\rangle$ and $|\nu_2\rangle$ [53], например нейтрино от ${}^8\text{B}$ пребывает как $|\nu_2\rangle$. Влияние вещества на распространение нейтрино в Земле существенно отличается от распространения в Солнце. Данные из геологии указывают на наличие в Земле слоёв разной плотности с резкими переходами между слоями [54]. На границах между слоями условие адиабатичности (2.26) не выполняется, что приводит к регенерации примеси состояний $|\tilde{\nu}_1\rangle$.

Для исследования влияния декогеренции на асимметрию, необходимо рассматривать прохождение когерентной смеси массовых состояний сквозь Землю [55], что существенно модифицирует осцилляции. Возможное влияние когерентности исходных состояний на величину асимметрии A_{D-N} было изучено в работе [56]. Несмотря на то, что вероятности выживания P_{ee} существенно различаются, пересчёт в числа событий нивелирует разницу между когерентным и некогерентным пучком нейтрино в силу различных эффектов

усреднения (энергетическое разрешение детектора, геометрическая неопределённость точки рождения нейтрино в Солнце, движение Земли по орбите). Чтобы избежать такого драматического усреднения необходимо

- Измерять энергию *нейтрино* с относительной точностью $\approx 10^{-6}$,
- Измерять направление прихода нейтрино с точностью $1/500$ от видимого размера Солнца,
- Иметь биннинг событий по времени в несколько часов.

При текущей точности солнечных экспериментов эти условия невыполнимы, что означает невозможность изучения влияния декогеренции на асимметрию день-ночь.