

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВПО «ИГУ»)**

---

**Международная межправительственная организация  
Объединенный Институт Ядерных Исследований  
Лаборатория ядерных проблем имени В.П. Джелепова**

Физический факультет  
Кафедра теоретической физики  
Зав. кафедрой, профессор  
Валл А. Н. \_\_\_\_\_

**Дипломная работа**

**Определение иерархии масс нейтрино в экспериментах  
с реакторными и ускорительными нейтрино**

Руководители:

\_\_\_\_\_ к.ф.-м.н. Наумов Д. В. (ОИЯИ),  
\_\_\_\_\_ д.ф.-м.н. Коренблит С. Э. (ИГУ),  
Студент группы 1522-ДС

\_\_\_\_\_ Тайченачев Д. В.

Работа защищена с оценкой \_\_\_\_\_

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2014

Протокол № \_\_\_\_\_

Рецензент:

\_\_\_\_\_

Нормоконтролер:

\_\_\_\_\_ Перевалова И. А.

**Дубна-Иркутск 2014 г.**

## Задание на дипломную работу

Произвести моделирование и расчёт ожидаемых спектров наблюдаемых событий в экспериментах JUNO и NOVA, разработать программный пакет для их вычисления и статистического анализа с учётом известных ошибок на осцилляционных параметрах и других систематических неопределённостей. Предусмотреть возможность дальнейшей реализации других экспериментов и совместного анализа с целью оценки осцилляционных параметров.

Изучить и разработать методы оценки чувствительности реакторных и ускорительных экспериментов к измерению иерархии масс нейтрино, получить такие оценки для экспериментов JUNO и NOVA, произвести сравнение с существующими оценками. Оценить ожидаемый эффект от совместного анализа данных двух экспериментов для определения иерархии масс.

# Реферат

В данной работе кратко изложено введение в стандартную модель, рассмотрена роль нейтрино в её построении. Даны основные сведения о проблеме теоретического описания массивных нейтрино в рамках стандартной модели, описаны известные на текущий момент экспериментальные сведения о параметрах лептонного смешивания а также некоторые актуальные открытые вопросы нейтринной физики.

Дано теоретическое описание явления нейтринных осцилляций в вакууме и веществе в плосковолновом подходе.

Представлены сведения, необходимые для моделирование реакторного эксперимента JUNO и ускорительного эксперимента NOVA с целью вычисления наблюдаемых спектров. Описаны источники нейтрино в данных экспериментах, сечения реакций их обнаружения в детекторе, приведены формулы осцилляций.

Описан подход к оценке чувствительности к иерархии масс нейтрино с учётом статистических неопределённостей и вырождений параметров, даны результаты его применение к экспериментам JUNO и NOVA. Для эксперимента JUNO проведена оценка чувствительности при различной удалённости детектора от реакторных комплексов, показана зависимость от массы детектора, энергетического разрешения, значений осцилляционных параметров и ошибок на них. Получены оценки точности измерения параметров  $\sin^2 \theta_{12}$ ,  $\sin^2 \theta_{13}$  и  $\Delta m_{21}^2$ . Произведено сравнение полученной чувствительности с другими методами оценки. Оценён ожидаемый эффект на чувствительность от совместного анализа экспериментов JUNO и NOVA.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>7</b>
1.1	Стандартная Модель и нейтрино . . . . .	7
1.2	Источники нейтрино и экспериментальные методы по их детектированию	11
1.2.1	Ускорительные нейтрино . . . . .	11
1.2.2	Реакторные нейтрино . . . . .	12
1.2.3	Атмосферные нейтрино . . . . .	13
1.2.4	Солнечные нейтрино . . . . .	14
1.2.5	Геонейтрино . . . . .	15
1.3	Что мы знаем о нейтрино? Краткий обзор. . . . .	17
1.4	Открытые вопросы . . . . .	18
1.4.1	Иерархия масс нейтрино . . . . .	18
1.4.2	Дирак или Майорана . . . . .	18
1.4.3	Нарушение CP-четности . . . . .	19
1.4.4	Унитарность матрицы смешивания . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Осцилляции нейтрино</b>	<b>22</b>
2.1	Плосковолновая теория нейтринных осцилляций в вакууме . . . . .	22
2.2	Осцилляции нейтрино в веществе . . . . .	24
2.2.1	2х-нейтринные осцилляции . . . . .	25
2.2.2	3х-нейтринные осцилляции . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Статистический анализ</b>	<b>28</b>
3.1	Функция правдоподобия и $\chi^2$ . . . . .	28
3.2	Методы учета неопределённостей в знании параметров модели . . . . .	30
3.2.1	Штрафные члены . . . . .	31
3.2.2	Ковариационная матрица в приближении гауссовой статистики . . . . .	31
3.2.3	Ковариационная матрица в приближении пуассоновой статистики	34
3.2.4	Ковариационная матрица в приближении совместной гауссовой и пуассоновой статистик . . . . .	35

<b>4</b>	<b>Моделирование эксперимента JUNO</b>	<b>37</b>
4.1	Потоки антинейтрино от реактора . . . . .	38
4.2	Сечение взаимодействия . . . . .	40
4.3	Вероятность осцилляций . . . . .	41
4.3.1	Вероятность выживания в вакууме . . . . .	41
4.3.2	Учет эффектов вещества . . . . .	43
4.4	Моделирование отклика детектора . . . . .	43
4.4.1	Разрешение энергии . . . . .	43
4.5	Ожидаемые числа событий . . . . .	44
4.6	Учтённые неопределенности . . . . .	46
4.6.1	Ковариационная матрица . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Моделирование эксперимента NOVA</b>	<b>48</b>
5.1	Потоки нейтрино и антинейтрино от ускорителя . . . . .	48
5.1.1	Потоки вне оси . . . . .	48
5.2	Сечения взаимодействия . . . . .	49
5.2.1	Квазиупругое взаимодействие . . . . .	51
5.2.2	Резонансное взаимодействие . . . . .	53
5.2.3	Глубоконеупругое взаимодействие . . . . .	55
5.3	Вероятность осцилляций в вакууме и веществе . . . . .	56
5.4	Ожидаемые числа событий . . . . .	57
5.5	Учтенные неопределённости . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Результаты анализа чувствительности эксперимента JUNO</b>	<b>58</b>
6.1	Неоднозначность в определении иерархии масс методом функции правдоподобия . . . . .	58
6.2	Определение иерархии масс в эксперименте . . . . .	61
6.2.1	Статистическая значимость определения иерархии масс . . . . .	63
6.2.2	Поиск оптимального расстояния . . . . .	63
6.2.3	Зависимость от параметров . . . . .	66
6.3	Сравнение с оценкой методом функции правдоподобия . . . . .	69
6.4	Сравнение с “методом $\sqrt{\Delta\chi^2}$ ” . . . . .	69
6.5	Измерение осцилляционных параметров . . . . .	71
<b>7</b>	<b>Результаты анализа чувствительности эксперимента NOVA</b>	<b>73</b>
7.1	Определение иерархии масс в эксперименте . . . . .	73
7.2	Статистическая значимость определения иерархии масс . . . . .	74
7.2.1	Оценки ожидаемой чувствительности . . . . .	76
7.3	Сравнение с “методом $\sqrt{\Delta\chi^2}$ ” . . . . .	77

<b>8</b>	<b>Результаты совместного анализа чувствительности экспериментов JUNO и NOVA</b>	<b>79</b>
8.1	Определение иерархии масс . . . . .	79
	<b>Выводы</b>	<b>82</b>
	<b>Список используемых источников</b>	<b>83</b>

# Глава 1

## Введение

### 1.1 Стандартная Модель и нейтрино

Стандартная модель описывает три фундаментальных взаимодействия природы – сильное, слабое и электромагнитное. Входящие в неё элементарные частицы делятся на три класса: кварки, образующие сильновзаимодействующие адроны, лептоны, в сильных взаимодействиях не участвующие, и частицы-переносчики фундаментальных взаимодействий.

Существует шесть кварков несущие цветовой заряд, объединённые в три поколения и различаемые кварковым ароматом (флейвором):  $u, d, c, s$  и  $t, b$  и электрическим зарядом  $+2/3$  и  $-1/3$  внутри поколения, а также соответствующие им античастицы. Лептонов также шесть, объединённых в три поколения – в каждом поколении, характеризуемым лептонным флейвором:  $e, \mu$  и  $\tau$  присутствует заряженный лептон: электрон, мюон или тау-лептон, и электрически нейтральное нейтрино: электронное  $\nu_e$ , мюонное  $\nu_\mu$  и таонное  $\nu_\tau$  соответственно. Для каждого лептона также определена соответствующая античастица. Кварки и лептоны имеют полуцелый спин, то есть являются фермионами.

В качестве переносчиков взаимодействий в стандартной модели выступают частицы с целым спином – бозоны: фотон  $\gamma$ , переносящий электромагнитное взаимодействие, два заряженных  $W^\pm$  и один нейтральный  $Z$  бозона переносящие слабое взаимодействие и восемь глюонов  $g$  переносящие сильное взаимодействие и сами имеющие цветовой заряд.

Стандартная модель описывает частицы в терминах полей и являясь калибровочной теорией основана на группе симметрии  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Группа  $SU(3)$  соответствует сильному взаимодействию,  $SU(2) \times U(1)$  – электрослабому.

Нейтрино входят в лагранжиан стандартной модели вместе с соответствующим

заряженным лептоном в составе левого SU(2)-дублета:

$$L^f = \begin{pmatrix} \nu_L^f \\ \ell_L^f \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где  $f = e, \mu, \tau$  а под  $\psi_L(x)$  подразумевается проекция дираковского поля  $\psi(x)$  на состояния с левой хиральностью:  $\psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}\psi(x)$ . Поля с правой хиральностью  $\ell_R^f = \frac{1 + \gamma_5}{2}\ell^f(x)$  не взаимодействуют с  $W^\pm$  бозонами, являясь SU(2)-синглетами. Это обеспечивает максимальное нарушение  $P$ -чётности в слабых взаимодействиях, наблюдающееся экспериментально. Аналогично устроены кварковые дублеты левых полей:

$$Q = \begin{pmatrix} U_L \\ D_L \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где  $U = (u, c, t)$ ,  $D = (d, s, b)$ , и правые синглеты  $U_R, D_R$ .

Лагранжиан стандартной модели инвариантен относительно калибровочных преобразований  $\psi(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)}\psi(x)$  с произвольными и независимыми в каждой пространственно-временной точке  $x$  параметрами  $\alpha(x)$ . Инвариантность обеспечивается взаимодействием кварков и лептонов с калибровочными бозонами ( $\gamma, W^\pm, Z, g$ ), которое компенсируют дополнительные члены с  $\partial_\mu\alpha(x)$ , возникающие от операторов дифференцирования в кинетическом члене лагранжиана свободных фермионных полей. Таким образом, калибровочно-инвариантный кинетический член лагранжиана стандартной модели имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{kinetic}} &= \sum_{\psi} \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi - \sum_{A=B,W,g} \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(A) F^{\mu\nu}(A), \\ D_\mu &= \partial_\mu + i g_s g_\mu^A T_A + i g W_\mu^a T_a + i g' B_\mu Y, \\ F_{\mu\nu}^a(A) &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $g_s, g, g'$  – константы связи фермионов с калибровочными полями глюонов ( $g_\mu^A, A = 1 \dots 8$ ) и бозонов  $W_a$  ( $W_\mu^a, a = 1 \dots 3$ ) и  $B_\mu$ .  $f_{abc}$  – структурные константы алгебры соответствующей калибровочной группы с генераторами  $T_a$ , удовлетворяющими коммутационным соотношениям  $[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$ .  $T_A, T_a$  и  $Y$  – генераторы калибровочных SU(3), SU(2) и U(1), для неабелевых групп SU(3), SU(2) представимые через  $3 \times 3$  матрицы Гелл-Манна  $\lambda_A$  ( $T_A = \lambda_A/2$ ),  $2 \times 2$  матрицы Паули  $\tau_a$  ( $T_a = \tau_a/2$ ) соответственно. Для абелевой группы U(1) генератор  $Y$  является числом. Суммирование в  $\sum_{\psi}$  производится по лептонным и кварковым полям.

Для описания массы калибровочных бозонов калибровочная симметрия спонтанно нарушается введением в лагранжиан члена

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = |D_\mu H|^2 - \frac{\lambda^2}{4} (|H|^2 - v^2)^2,$$

со скалярным полем Хиггса  $H = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$  имеющим в минимуме потенциала ненулевое вакуумное среднее  $v = \langle 0 | \phi^0 | 0 \rangle$ . Данный член приводит четыре калибровочным бозона  $W^1, W^2, W^3$  и  $B$  к трём массивным:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \pm iW_\mu^2), \quad Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu, \quad \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}},$$

интерпретируемым как наблюдаемые  $W^\pm$  и  $Z$  бозоны с массами  $m_{W^\pm} = gv/2$ ,  $m_Z = gv/2 \cos \theta_W$ . Оставшийся безмассовый бозон

$$A_\mu = \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W W_\mu^3, \quad m_\gamma = 0.$$

интерпретируется как фотон, а соответствующая ненарушенная  $U(1)$  симметрия обеспечивает сохранение электрического заряда.

Для придания массы фермионам, в стандартной модели постулируется юкавовское взаимодействие с полем Хиггса введением в лагранжиан члена:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \lambda_{ij} \psi_i \psi_j H + \text{h.c.}, \quad (1.4)$$

где  $\lambda_{ij}$  – безразмерные константы связи. В общем случае в лагранжиан включаются все возможные комбинации полей  $\psi_i, \psi_j$ , для которых  $\psi_i \psi_j H$  является синглетом по калибровочным группам. После спонтанного нарушения симметрии члены вида  $\lambda_{ij} v \psi_i \psi_j$ , возникающие за счёт ненулевого вакуумного среднего поля Хиггса  $v$ , могут быть интерпретированы как массовые члены фермионов  $\psi$ . Но так как в общем случае (1.4) содержит различные фермионные поля  $\psi_i$  и  $\psi_j$ ,  $i \neq j$ , для такой интерпретации необходимо произвести диагонализацию лагранжиана выделяя линейные комбинации полей  $\psi_i$ , имеющих определённую массу. Диагонализирующая унитарная матрица  $V$ , связывающая поля с определённой массой и исходные безмассовые взаимодействующие поля кварков называется матрицей Кабиббо-Кобаяси-Маскавы (СКМ) матрицей, аналогичная матрица в лептонном секторе имеет название матрицы Понтекорво-Маки-Накагавы-Сакаты (PMNS). Данные матрицы описывают смешивание взаимодействующих фермионов, в частности смешивание нейтрино.

Построенная таким образом стандартная модель находится в прекрасном согласии с экспериментальными данными и описывается лагранжианом:

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{kinetic}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}. \quad (1.5)$$

Теория содержит следующие свободные параметры, теоретическое предсказание которых в её рамках невозможно: константы взаимодействий ( $g_i = g_s, g, g'$ ), массы лептонов ( $m_l, m_\nu$ ) и кварков ( $m_q$ ), параметры смешивания нейтрино (4 параметра унитарной матрицы  $3 \times 3$ , например углы смешивания  $\theta_{12}^\nu, \theta_{23}^\nu, \theta_{13}^\nu$  и фаза CP-нарушения в лептонном

секторе  $\delta_{\text{CP}}^\nu$ ), параметры смешивания кварков ( $\theta_{12}^q, \theta_{23}^q, \theta_{13}^q$  и фаза CP нарушения в кварковом секторе  $\delta_{\text{CP}}^q$ , вакуумный параметр КХД ( $\theta_{\text{qcd}}$ ) и параметры самодействия поля Хиггса ( $\lambda$  и  $\nu$ ) – всего 26 параметров. Относительно большое число свободных параметров, требующих тонкой подстройки для соответствия эксперименту и в частности произвольность юкавовских констант связи, определяющих массы фермионов, указывает на неполноту стандартной модели. Кроме того, различный характер распределения по поколениям масс кварков и заряженных лептонов по сравнению с нейтрино (таб. 1.1) вызывает сомнения в применимости того же самого механизма генерации массы нейтрино, что и для остальных фермионов стандартной модели. Изучение массы нейтрино может служить ключом к открытию новых механизмов за её пределами.

1.	$m_u = (1, 5 - 3, 3)$ МэВ	$m_d = (3, 5 - 6, 0)$ МэВ	$m_e = 0, 511$ МэВ	$m_{\nu_1} < 2, 2$ эВ
2.	$m_c = (1, 27_{-0,11}^{+0,07})$ МэВ	$m_s = (105_{-35}^{+25})$ МэВ	$m_\mu = 105, 658$ МэВ	$m_{\nu_2} < 2, 2$ эВ
3.	$m_t = (171, 3 \pm 3, 3)$ МэВ	$m_b = (4, 20_{-0,07}^{+0,17})$ МэВ	$m_\tau = 1, 777$ МэВ	$m_{\nu_3} < 2, 2$ эВ

Таблица 1.1: Массы фермионов стандартной модели по поколениям

Лоренц-инвариантный массовый член фермионного поля должен включать произведение левой  $\psi_L(x)$  и правой  $\psi_R(x)$  компонент поля. Для заряженных частиц единственно возможный вид такого члена реализуется юкавовским взаимодействием с полем Хиггса (1.4) и такой массовый член называется дираковским. Однако для электрически нейтральных частиц, в частности нейтрино, существует возможность построения массового члена в форме Майорана с использованием зарядового сопряжения левых  $((\nu_L^f)^c = C\bar{\nu}_L^{fT}$ ,  $C$  – матрица зарядового сопряжения) и правых  $((\nu_R^f)^c = C\bar{\nu}_R^{fT}$ ) компонент поля  $\nu^f(x)$ , которые преобразуются соответственно как правые и левые поля:

$$\mathcal{L}_{\text{Majorana}} = -\frac{1}{2}\bar{n}u_L m_L (\nu_L)^c - \frac{1}{2}\bar{n}u_R m_R (\nu_R)^c + \text{h.c.},$$

где под  $\nu_{L,(R)}$  имеется ввиду столбец левых (правых) компонент взаимодействующих нейтринных полей  $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \dots)_{L,(R)}^T$ , а  $m_L, m_R$  – матрицы майорановских масс. В общем случае массовый член электрически нейтрального фермионного поля может содержать как дираковскую, так и майорановские массы:

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\frac{1}{2} \left( \bar{\nu}_L, \overline{(\nu_R)^c} \right) \begin{pmatrix} m_L & m_D^T \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\nu_L)^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + \text{h.c.}, \quad (1.6)$$

где  $m_D$  – матрица дираковских масс.

Массовый член (1.6) может давать различные предсказания масс нейтрино. Например, для одного поколения нейтрино, когда матрицы  $m_L, m_R, m_D$  являются числами, собственные значения матрицы масс в (1.6) равны:

$$m_{1,2} = \frac{m_L + m_R}{2} \pm \sqrt{\frac{(m_L - m_R)^2}{4} + m_D^2}, \quad \tan 2\theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L}, \quad (1.7)$$

и диагонализация приводит к следующим предельным случаям нейтринных масс  $|m_1|$ ,  $|m_2|$  и угла смешивания  $\theta$ :

- (A)  $m_L = m_R = 0$ . В этом случае,  $m_{1,2} = m_D$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  – смешивание максимально. Здесь два майорановских поля эквивалентны одному дираковскому.
- (B)  $m_L = m_R \ll m_D$ . В этом случае реализуются два почти вырожденных майорановских состояния с массами  $m_{1,2} = m_L \pm m_D$  и почти максимальным смешиванием  $\tan 2\theta \gg 1$ , такие нейтрино называются “псевдо-дираковскими”. Возможны осцилляции между  $\nu_L$  (“активными”) и  $(\nu_R)^c$  (“стерильными”) нейтрино.
- (C)  $m_L = 0, m_R \gg m_D$ . Этот случай естественным образом приводит к строгому упорядочению нейтринных масс – существует очень тяжёлое нейтрино с массой  $m_1 = m_R(1 + m_D^2/m_R^2) \approx m_R$  и очень лёгкое с массой  $m_2 = m_D^2/m_R \ll m_D$ . Например, если предположить, что масса  $m_D$  по порядку величины соответствует массам заряженных лептонов или кварков (т.е. в пределах 0.5 МэВ – 200 ГэВ), а масса  $m_R \sim 10^{15}$  ГэВ, тогда масса  $m_2$  может быть в пределах от  $10^{-14}$  эВ до 0.04 эВ. В этом случае смешивание лёгкого и тяжёлого нейтрино очень мало:  $\theta \approx m_D/m_R \sim 10^{-20} - 10^{-13} \ll 1$ . Данный механизм называется “механизмом качелей” (“seesaw mechanism”) и позволяет естественно объяснить малую массу нейтрино по сравнению с массами кварков и заряженных лептонов.. Появление большой массы порядка  $m_R \simeq 10^{15}$  ГэВ характерно для теорий великого объединения, указания на реализацию данного механизма могут привести к пониманию физики на больших энергетических масштабах за пределами стандартной модели.

## 1.2 Источники нейтрино и экспериментальные методы по их детектированию

### 1.2.1 Ускорительные нейтрино

Для лабораторного исследования слабых процессов широко используются нейтринные пучки, получаемые на ускорителях заряженных частиц, в частности на синхротронах в Брукхейвенской лаборатории, Фермилабе, CERN, КЕК и др. Принцип получения нейтрино основан на следующем: ускоренный протонный пучок направляется на мишень, что приводит к образованию вторичных адронов, в частности пионов и каонов, которые после фокусировки магнитными линзами через некоторое время распадаются. Полученные после распада заряженные лептоны поглощаются в экранирующем веществе, а практически свободно проходящие через него нейтрино образуют конечный нейтринный пучок. Доминирующим каналом распада пионов ( $BR \approx 100\%$ ) является

распад:

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu),$$

приводит к рождению мюонных нейтрино, так же как и доминирующий распад заряженных каонов (BR = 63,4%):

$$K^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu).$$

Второй по вероятности (BR = 21,16%) распад заряженных каонов приводит к рождению пионов и снова образованию мюонных нейтрино. Таким образом, пучки ускорительные пучки состоят прежде всего из мюонных нейтрино с примесью других флейворов, например вследствие распада свободных мюонов:

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e) + \bar{\nu}_\mu(\nu_\mu).$$

Преимуществом ускорителей как источников нейтрино является возможность контролировать характеристики полученного нейтринного пучка задавая интенсивность, временную структуру и профиль исходного пучка протонов, а также энергию распадающихся пионов, что позволяет получать пучки нейтрино широких энергетических диапазонов (от нескольких до сотен ГэВ) с хорошо известным спектром и флейворным составом.

## 1.2.2 Реакторные нейтрино

Ядерный реактор - источник мощного потока электронных антинейтрино, возникающих при  $\beta$ -распадах радиоактивных изотопов реакторного топлива. Основной вклад в поток антинейтрино дают распады изотопов  $^{235}\text{U}$  ( $\approx 57\%$ ), составляющего основу ядерного топлива,  $^{239}\text{Pu}$  ( $\approx 29\%$ ), изначально в топливе отсутствующего и образующегося при захвате нейтрона ядром  $^{238}\text{U}$ , изотопа урана  $^{238}\text{U}$  ( $\approx 8\%$ ), распады которого индуцируются быстрыми нейтронами и изотопа  $^{241}\text{Pu}$  ( $\approx 6\%$ ), образующегося при захвате нескольких нейтронов ядром  $^{238}\text{U}$ . В среднем за одну распадную цепочку выделяется шесть антинейтрино, что при мощности реактора  $\sim 1$  ГВт приводит к изотропному излучению  $2 \cdot 10^{20}$  антинейтрино в секунду [1]. Спектры излучаемых отдельными изотопами антинейтрино могут быть получены из измерений  $\beta$ -спектров распадов ядер под воздействием тепловых нейтронов (не применимо для  $^{241}\text{Pu}$ ) или рассчитаны суммированием по всем возможным каналам распада. Спектр полного потока зависит от состава реакторного топлива, изменяющийся с течением времени работы реактора.

Реакторные нейтрино детектируются реакцией обратного  $\beta$ -распада (IBD) на свободных протонах:

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n.$$

IBD-события представляет собой прямой сигнал ионизации и аннигиляции позитрона, и задержанный сигнал захвата нейтрона протоном или ядром. Из-за большого сечения взаимодействия с нейтронами, для наблюдения задержанного сигнала вещество детектора обогащается гадолинием  $Gd$ , при захвате на котором выделяется несколько фотонов с полной энергией  $\approx 8$  МэВ. В жидком сцинтилляторе на 0,1% обогащённый гадолинием средняя задержка между сигналами составляет около 30 мкс, такая временная корреляция позволяет эффективно отделять IBD события от фона. Энергия налетающего антинейтрино может быть восстановлена из энергии прямого сигнала:  $E_{\bar{\nu}} \approx E_{prompt} + 0,97$  МэВ.

### 1.2.3 Атмосферные нейтрино

Атмосферные нейтрино образуются при столкновении первичных космических лучей (в основном, протонов) с ядрами в верхних слоях атмосферы. Столкновение рождает адронные ливни, содержащие, в частности, большое количество пионов и каонов. Пионы впоследствии распадаются на мюон и мюонное нейтрино:

$$\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}),$$

а мюон, в свою очередь, распадается на электрон, мюонное и электронное нейтрино:

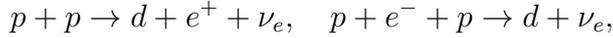
$$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \nu_e(\bar{\nu}_e) + \bar{\nu}_{\mu}(\nu_{\mu})$$

Таким образом, поток атмосферных нейтрино состоит из мюонных и электронных нейтрино и антинейтрино, причём флейворное отношение потоков  $\nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu})$  к потоку  $\nu_e(\bar{\nu}_e)$  примерно равно двум. Для нейтрино больших энергий  $\gtrsim 1$  ГэВ флейворное отношение увеличивается, так как высокоэнергичные мюоны не успевают распасться в атмосфере. Энергия наблюдаемых атмосферных нейтрино лежит в диапазоне от 100 МэВ и достигает значений  $> 1$  ТэВ.

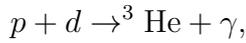
Поток атмосферных нейтрино вызывает примерно 200 событий в год для детектора массой 1 кт [2]. Из-за большого мюонного фона, наблюдение атмосферных нейтрино производится в подземных обсерваториях. Для детектирования используются водные черенковские детекторы, основанные на регистрации черенковского излучения релятивистских заряженных частиц рождающихся при взаимодействии нейтрино с ядрами вещества детектора, по зарегистрированному излучению производится реконструкция энергии первичного нейтрино. Примером черенковских детекторов служат Kamiokanda (масса 8 кт) и Super-Kamiokanda (масса 50 кт). Также используют трековые детекторы, позволяющие регистрировать частицы с меньшей энергией ниже порога черенковского излучения.

## 1.2.4 Солнечные нейтрино

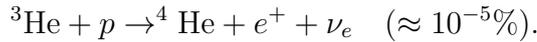
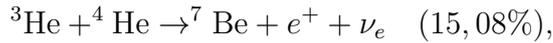
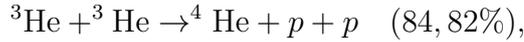
Солнечные нейтрино образуются в термоядерных реакциях происходящих в центре солнца при температура порядка  $15 \cdot 10^6$  К. Термоядерные реакции, происходящие на солнце, являются частью  $pp$  и  $CNO$  циклов, причем вклад в солнечную энергию  $CNO$ -цикла составляет порядка 1%, основной вклад даёт  $pp$ -цикл. Его началом является образование дейтерия:



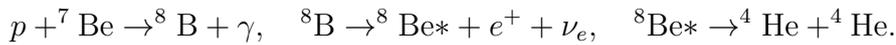
с доминирующей первой реакцией (99,71% дейтерия). Дейтерий и протон образуют гелий:



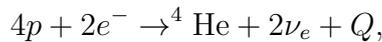
который затем распадается по каналам:



Бериллий, образованный во второй реакции также превращается в  ${}^4\text{He}$ :



Образованные в реакциях позитроны аннигилируют с электронами. Таким образом,  $pp$ -цикл, дающий подавляющий вклад в солнечную энергию выглядит как:



где

$$Q = 4m_p + 2m_e - m_{{}^4\text{He}} \approx 26,73 \text{ МэВ},$$

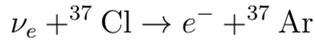
и на каждые  $\frac{1}{2}Q \approx 13,36$  МэВ солнечной энергии приходится одно электронное нейтрино. Точные предсказания потока по реакциям, основанные на стандартной солнечной модели, приведены в таб. 1.2 [2].

Экспериментально наблюдались низкоэнергетичные  $pp$ -нейтрино, среднеэнергетичные монохроматические  ${}^7\text{Be}$ -нейтрино и высокоэнергетические  ${}^8\text{B}$ -нейтрино. Наблюдаемый поток существенно отличается в меньшую сторону от предсказаний стандартной солнечной модели вследствие явления осцилляций.

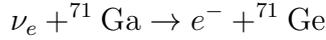
Обозначение	Реакция	Поток (см <sup>-2</sup> с <sup>-1</sup> )	$E_\nu$ , МэВ
$pp$	$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$	$6,05 \cdot 10^{10}$	$\leq 0,42$
$pep$	$p + e^- + p \rightarrow d + \nu_e$	$1,45 \cdot 10^8$	1,44
${}^7\text{Be}$	${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$	$4,38 \cdot 10^9$	0,86
${}^8\text{B}$	${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be}^* + e^+ + \nu_e$	$4,59 \cdot 10^6$	$\lesssim 15$
$hep$	${}^3\text{He} + p \rightarrow {}^4\text{He} + e^+ + \nu_e$	$8,23 \cdot 10^3$	$\leq 18,8$
${}^{13}\text{N}$	${}^{13}\text{N} \rightarrow {}^{13}\text{C} + e^+ + \nu_e$	$2,03 \cdot 10^8$	$\leq 1,20$
${}^{15}\text{O}$	${}^{15}\text{O} \rightarrow {}^{15}\text{N} + e^+ + \nu_e$	$1,47 \cdot 10^8$	$\leq 1,73$
${}^{17}\text{F}$	${}^{17}\text{F} \rightarrow {}^{17}\text{O} + e^+ + \nu_e$	$3,31 \cdot 10^6$	$\leq 1,74$

Таблица 1.2: Предсказания потоков нейтрино стандартной солнечной модели

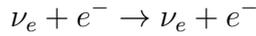
Детектирование солнечных нейтрино впервые было произведено в реакции на хлоре:



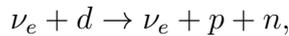
с порогом 0,814 МэВ, позволяющим наблюдать в основном  ${}^8\text{B}$ -нейтрино и  ${}^7\text{Be}$ -нейтрино (эксперимент Homestake, 1968 год). Также использовались реакция на галлии:



с порогом 0,233 МэВ (эксперименты GALLEX-GNO, SAGE), реакции упругого рассеяния на электроны:



в экспериментах с черенковским детектором (Kamiokande и Super-Kamiokande) и жидкосцинтилляционным детектором (Borexino), а также процессов:

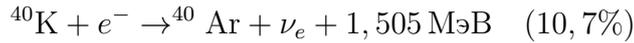
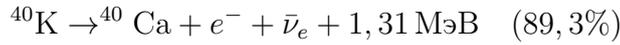
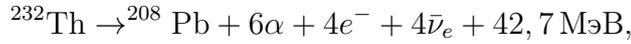


и упругого рассеяния на электроны в эксперименте SNO.

### 1.2.5 Геонейтрино

Геонейтрино – электронные антинейтрино, излучаемые при естественных радиоактивных распадах в Земле. Время полураспада радиоактивных изотопов сравнимо с возрастом Земли:  ${}^{232}\text{Th}$  ( $\tau_{1/2} = 14,0 \cdot 10^9$  лет),  ${}^{238}\text{U}$  ( $\tau_{1/2} = 4,47 \cdot 10^9$  лет),  ${}^{235}\text{U}$  ( $\tau_{1/2} = 0,70 \cdot 10^9$

лет),  $^{40}\text{K}$  ( $\tau_{1/2} = 1,28 \cdot 10^9$  лет). Излучение нейтрино происходит в следующих реакциях [3]:



Основной вклад в нейтринный поток дают распады изотопов  $^{238}\text{U}$ ,  $^{232}\text{Th}$  и  $^{40}\text{K}$ . Спектр антинейтрино от различных реакций приведен на рис. 1.1, вследствие нейтринных осцилляций наблюдаемый поток электронных антинейтрино составляет  $\sim 0,55$  от излученного и составляет порядка  $10^6 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ . Поток нейтрино от реакции захвата электрона калием, мал по сравнению с потоком от солнца и его экспериментальная регистрация затруднена.

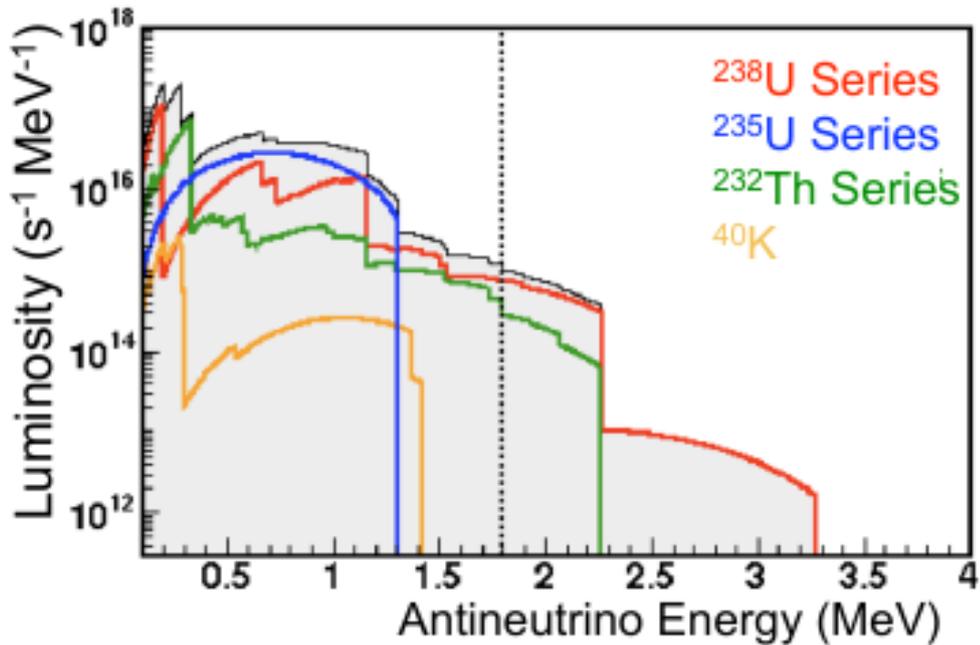


Рис. 1.1: Спектр геонейтрино [3]

Регистрация геонейтрино с энергией  $> 1.8 \text{ МэВ}$  от распадов  $^{238}\text{U}$ ,  $^{235}\text{U}$  и  $^{232}\text{Th}$  возможно реакцией IBD, что на текущий момент было произведено в экспериментах KamLAND и Borexino.

### 1.3 Что мы знаем о нейтрино? Краткий обзор.

На сегодняшний день экспериментально установлено, что нейтрино являющиеся массивными частицами смешиваются при взаимодействии с  $W^\pm$  бозонами в стандартной модели. Матрица Понтекорво-Маки-Накагавы-Сакааты, описывающая лептонное смешивание в стандартном виде параметризуется как:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23} & \sin \theta_{23} \\ 0 & -\sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{13} & 0 & \sin \theta_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13} e^{i\delta} & 0 & \cos \theta_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} & 0 \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P,$$

где  $\theta_{ij}$  – три независимых угла смешивания,  $\delta$  – дираковская фаза  $CP$ -нарушения,  $P = \text{diag}\{1, e^{i\alpha_{21}/2}, e^{i\alpha_{31}/2}\}$ , а  $\alpha_{21}, \alpha_{31}$  – майорановские фазы  $CP$ -нарушения. Значение углов  $\theta_{12}, \theta_{23}$  были измерены в экспериментах с различными источниками нейтрино – солнечных, атмосферных, реакторных и ускорительных. Угол  $\theta_{13}$  был измерен последним, в 2012 году в реакторном эксперименте Daya Bay [4], в котором было получено отличное от нуля значение. Впоследствии измерение было подтверждено в реакторных экспериментах RENO [5] и Double Chooz [6], ранее получившим указания на ненулевое значение угла смешивания [7]. Указания на ненулевой угол были также получены в 2011 году в ускорительных экспериментах MINOS [8] и T2K [9].

Основным источником информации о параметрах смешивания и массах нейтрино являются эксперименты по нейтринным осцилляциям, позволяющие измерить все элементы матрицы PMNS и разности квадратов масс различных нейтринных состояний. Известные на сегодняшний день результаты приведены в ниже (1.8), где также указаны ограничения на массы нейтрино, следующие из космологии ( $\sum_i m_i$ ), прямого измерения спектров  $\beta$ -распадов ядер ( $m_{\nu_e}$ ) и ограничение на эффективную майорановскую массу из экспериментов по двойному безнейтринному  $\beta$ -распаду ( $|m_{\beta\beta}| = |\sum_i V_{ei}^2 m_i|$ ).

$$\begin{aligned} \Delta m_{21}^2 &= 7.54_{-0.22}^{+0.26} \times 10^{-5} \text{эВ}^2, \\ \sin^2 \theta_{12} &= 0.307_{-0.016}^{+0.018} & |\Delta m_{31}^2| &= 2.43_{-0.10}^{+0.06} \times 10^{-3} \text{эВ}^2, \\ \sin^2 \theta_{23} &= 0.386_{-0.021}^{+0.024} & m_{\nu_e} &< 2.05 \text{эВ}, \\ \sin^2 \theta_{13} &= 0.024_{-0.0025}^{+0.0025} & \sum_i m_i &< 0.66 \text{эВ} \\ & & |m_{\beta\beta}| &< (0.2 - 0.4) \text{эВ} \end{aligned} \tag{1.8}$$

## 1.4 Открытые вопросы

### 1.4.1 Иерархия масс нейтрино

Из экспериментального наблюдения осцилляций известно, что существует нейтринные состояния с близкой массой ( $\Delta m_{\odot}^2$  порядка  $10^{-5} \text{эВ}^2$ ) и состояния с бóльшей разницей масс ( $\Delta m_{atm}^2 \sim 30 \Delta m_{\odot}^2$ ). Три таких массовых состояния можно упорядочить двумя различными способами, данная неопределённость составляет открытый вопрос иерархии масс нейтрино. Обозначив за  $\nu_1$  и  $\nu_2$  состояния с близкими массами так, что по определению масса  $\nu_1$  меньше  $\nu_2$  и  $\Delta m_{21}^2 \equiv m_2^2 - m_1^2 = \Delta m_{\odot}^2 > 0$ , а за  $\nu_3$  третье состояние с наиболее отличной массой, так что  $|\Delta m_{32}^2| \approx |\Delta m_{31}^2| = \Delta m_{atm}^2$  упорядочивания  $m_3 > m_2 > m_1$  называется *прямой* иерархией, а  $m_2 > m_1 > m_3$  – *обратной* иерархией масс нейтрино.

Таким образом иерархия определяет неизвестный на данный момент знак разностей масс  $\Delta m_{32}^2$  и  $\Delta m_{31}^2$ . Хотя формулы вероятности осцилляций в вакууме зависят только от модулей разностей масс, и замена  $\Delta m_{ij}^2 \mapsto -\Delta m_{ij}^2$  не изменяет наблюдаемых вероятностей, так как иерархия определяет также и связь между  $\Delta m_{32}^2$  и  $\Delta m_{31}^2$  при различных амплитудах осцилляционных членов соответствующих частот (что выполняется при  $\theta_{12} \neq 45^\circ$  и  $\theta_{13} \neq 0$ ) вероятности в гипотезах нормальной и обратной иерархии будут в общем случае различны. Это позволяет определить иерархию масс в экспериментах исследующих вакуумные осцилляции, таких как реакторный эксперимент JUNO. Кроме того, от иерархии масс существенно зависят вероятности осцилляций в веществе, что может быть использовано для её измерения в экспериментах с длинной базой, в частности в эксперимента NOVA.

### 1.4.2 Дирак или Майорана

Фермион является дираковским, если его зарядово-сопряжённое состояние (соответствующая ему античастица) отлично от него самого. В противном случае, если фермион совпадает со своим зарядовым сопряжением, он называется майорановским. В стандартной модели кварки и заряженные лептоны являются дираковскими фермионами, однако нейтрино, являясь электрически нейтральной частицей, может быть как дираковским, так и майорановским фермионом. Установление природы массивных нейтрино позволит лучше понять механизм генерации масс, лептонного смешивания и скрытые за ним симметрии, однако из существующих экспериментальных данных нет существенных указаний в пользу одной из возможностей.

Майорановская природа нейтрино проявляется себя в несохранении полного лептонного заряда  $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ , обнаружение процессов с нарушением его сохранения будет означать наличие у нейтрино майорановской массы. Одним из таких процессов

является двойной безнейтринный  $\beta$ -распад ( $0\nu 2\beta$ ):  $(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + e^- + e^-$ , его амплитуда пропорциональна эффективному массовому параметру:

$$|m_{\beta\beta}| = |m_1 V_{e1}^2 + m_2 V_{e2}^2 + m_3 V_{e3}^2| = |(m_1 c_{12}^2 + m_2 s_{12}^2 e^{i\alpha_{21}}) c_{13}^2 + m_3 s_{13}^2 e^{i(\alpha_{31} - 2\delta)}|.$$

Существует большое число экспериментов, нацеленных на наблюдение процесса двойного безнейтринного  $\beta$ -распада. Известные и ожидаемые оценки параметра  $|m_{\beta\beta}|$  в различных экспериментах представлены в таб. 1.3.

Эксперимент	Ядро	$m_{\beta\beta}$ , эВ
Heidelberg-Moscow	$^{76}\text{Ge}$	$< 0.22 - 0.64$
Cuoricino	$^{130}\text{Te}$	$< 0.30 - 0.71$
NEMO-3	$^{100}\text{Mo}$	$< 0.44 - 1.00$
KamLAND-Zen	$^{136}\text{Xe}$	$< 0.26 - 0.64$
EXO	$^{136}\text{Xe}$	$< 0.14 - 0.38$
GERDA	$^{76}\text{Ge}$	$< 0.073 - 0.2$
CURE	$^{130}\text{Te}$	$< 0.04 - 0.094$
KamLAND-Zen	$^{136}\text{Xe}$	$< 0.025$
EXO	$^{136}\text{Xe}$	$< 0.026 - 0.040$

Таблица 1.3: Эксперименты по оценке  $|m_{\beta\beta}|$ .

### 1.4.3 Нарушение $CP$ -четности

В отличие от кваркового сектора стандартной модели, где было экспериментально установлено нарушение  $CP$ -симметрии и измерена соответствующая фаза  $\delta_{\text{quark}} = (68, 76 \pm 4.58)^\circ$ , на текущий момент неизвестно, имеет ли место нарушение  $CP$ -симметрии в лептонном секторе. Глобальный анализ нейтринных экспериментов указывает на присутствие нарушения с фазой  $\delta_{\text{lepton}} = (194 \pm 67)^\circ$  со статистической значимостью  $2, 9\sigma$ , однако прямых прямых произведено не было. Прямое измерение возможно при изучении явления нейтринных осцилляций: нарушение  $CP$ -симметрии проявляется в различии вероятностей изменения флейвора для частиц и античастиц:  $P_{\alpha\beta} \neq P_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  при  $\delta \neq 0, \pi$ . Величина асимметрии  $\frac{P_{\alpha\beta} - P_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}{P_{\alpha\beta} + P_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}$  обратно пропорциональна  $\sin 2\theta_{13}$ . Измерение затруднены тем, что эффект взаимодействия с веществом не обладает  $CP$ -симметрией. На рис. 1.2 показана доля возможных значений фазы  $\delta$ , к которым чувствительны работающие и планируемые эксперименты на уровне  $1\sigma$ .

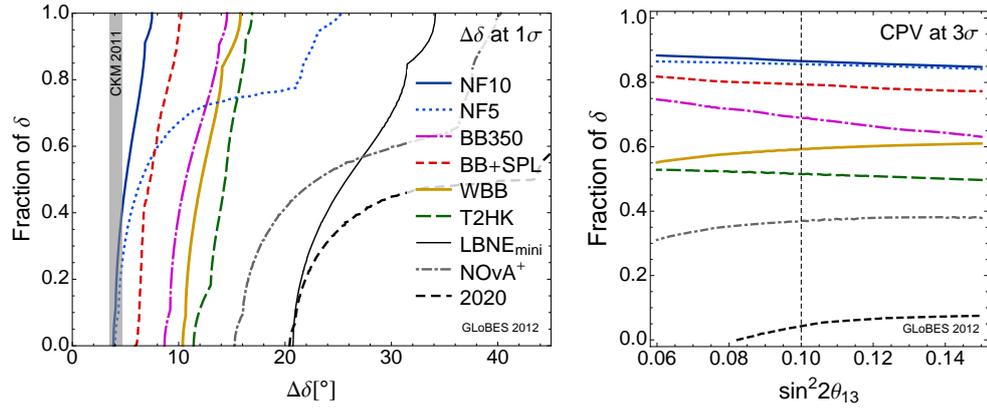


Рис. 1.2: Величина диапазона значений  $\delta$ , которые могут быть измерены на уровне  $1\sigma$  в различных экспериментах [10].

#### 1.4.4 Унитарность матрицы смешивания

Матрица лептонного смешивания  $V$  унитарна, если нейтрино стандартной модели смешиваются только между собой и отсутствует смешивание с гипотетическими, на данный момент неизвестными частицами (например, новым типом нейтрино). Условие унитарности записывается записывается в виде соотношений на элементы матрицы:

$$\sum_i V_{\alpha i} V_{\beta i}^* = \delta_{\alpha\beta}, \quad \sum_{\alpha} V_{\alpha i}^* V_{\alpha j} = \delta_{ij}.$$

Прямая проверка унитарности на настоящий момент не осуществлена, так как требует высокой точности измерения элементов матрицы смешивания. В то же время, существуют указания нескольких экспериментов на существование стерильных нейтрино, что означает невыполнение условия унитарности, в частности:

- Реакторная аномалия: новые расчёты потоков реакторных нейтрино [11, 12] дают на 3% большее предсказание за счёт уменьшения времени жизни нейтрона и учёта долгоживущих изотопов.
- Галлиевая аномалия: измеренный при калибровке эксперимента SAGE поток  $\nu_e$  составляет  $0.86 \pm 0.05$  от ожидаемого, отличаясь от единицы на  $2.8\sigma$ .
- В экспериментах LSND и MiniBooNE измеренная интенсивность  $\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e$  превышает ожидаемую.
- Измерения реликтового излучения экспериментом WMAP указывают на четыре нейтрино в качестве релятивистских степеней свободы.
- Однако существуют данные, подтверждающие ограничение на число нейтрино:

- Измеренное в экспериментах LSND и KARMEN сечение реакции  $\nu_e + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{12}\text{N} + e^-$  согласуется с ожидаемым;
- Астрофизическая оценка числа нейтрино из анализа данных эксперимента Planck совместно с другими составляет  $N_\nu = 3.73_{-0.51}^{+0.54}$ , что в пределах ошибки согласуется со значением 3.046 для трёх степеней свободы.

# Глава 2

## Осцилляции нейтрино

### 2.1 Плосковолновая теория нейтринных осцилляций в вакууме

Нейтрино, рождающиеся в слабых взаимодействиях с лептоном  $\ell^f$  в виде когерентной смеси массовых состояний при свободном распространении испытывает явление *осцилляций* – вероятность обнаружить частицу как нейтрино флейвора  $f$  периодична в пространстве и времени. Осцилляции возникают из-за различия масс, а значит и фазовых скоростей распространяющихся состояний, что приводит к периодическим фазовым сдвигам между ними.

Стандартный подход квантово-механический подход к описанию осцилляций рассматривает нейтринные состояния как плоские волны, причём связь между базисом  $|\nu_\alpha\rangle$ ,  $\alpha = e, \mu, \tau, \dots$  взаимодействующих и  $|\nu_i\rangle$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  распространяющихся состояний даётся матрицей лептонного смешивания PMNS:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i V_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle; \quad |\nu_i\rangle = \sum_\alpha V_{\alpha i} |\nu_\alpha\rangle. \quad (2.1)$$

Начальное состояние нейтрино, рожденного в пространственной точке  $x = 0$  в момент времени  $t = 0$  с флейвором  $\alpha$  в данных обозначениях имеет вид:

$$|\nu(0, 0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle = \sum_i V_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle.$$

Эволюция каждого из свободных состояний  $|\nu_i\rangle$  определяется свободным гамильтонианом с соответствующей массой  $m_i$ . В результате за время распространения  $t$  на расстояние  $L$  исходное состояние преобразуется в:

$$|\nu(L, t)\rangle = \sum_i V_{\alpha i}^* e^{-iE_i t + ip_i L} |\nu_i\rangle,$$

откуда вероятность обнаружить слабовзаимодействующую частицу с флейвором  $\beta$  равна:

$$P_{\alpha\beta}(L, t) = |\langle \nu_\beta | \nu(L, t) \rangle|^2 = \left| \sum_i V_{\beta i} V_{\alpha i}^* e^{-iE_i t + i p_i L} \right|^2. \quad (2.2)$$

Для стационарного источника с фиксированным энергетическим спектром, все  $E_i = E$  и наблюдается только эволюция состояний в пространстве. В релятивистском приближении  $p_i = \sqrt{E - m_i^2} \approx E - \frac{m_i^2}{2E}$  и вероятность (2.2) равна [13]:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(L) &= \left| \sum_i V_{\beta i} V_{\alpha i}^* \exp \left[ -i \frac{m_i^2}{2E} L \right] \right|^2 = \sum_{ij} V_{\alpha i}^* V_{\beta i} V_{\alpha j} V_{\beta j}^* \exp \left[ -i \frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} L \right] \\ &= \sum_i |V_{\alpha i}|^2 |V_{\beta i}|^2 + 2\text{Re} \sum_{i < j} V_{\alpha i}^* V_{\beta i} V_{\alpha j} V_{\beta j}^* \exp \left[ -i \frac{2\pi L}{L_{ji}^{\text{osc}}} \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\Delta m_{ji}^2 = m_j^2 - m_i^2$  – разности квадратов масс нейтринных состояний, а  $L_{ji}^{\text{osc}} = 4\pi E / \Delta m_{ji}^2$  – длины осцилляций, дающие характерный масштаб расстояний, на которых наблюдаемо явление осцилляций. Для случая трёх нейтрино формулу (2.3) можно записать как:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(L) &= \delta_{\alpha\beta} - 4\text{Re} \sum_{i < j}^3 V_{\alpha i}^* V_{\beta i} V_{\alpha j} V_{\beta j} \sin^2 \frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E} \\ &\quad + 8\mathcal{J} \sum_{\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \sin \frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \sin \frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \sin \frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\mathcal{J}$  – инвариант, характеризующий  $CP$  нарушение и определяемый из соотношения:

$$\text{Im}(V_{\alpha i}^* V_{\beta i} V_{\alpha j} V_{\beta j}^*) = \mathcal{J} \sum_{\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_k \epsilon_{ijk}.$$

Из (2.4) вероятность частице сохранить исходный флейвор  $\alpha$ , то есть вероятность выживания  $P_{\alpha\alpha}(L)$  даётся более простым выражением:

$$P_{\alpha\alpha}(L) = 1 - 4 \sum_{i < j}^3 |V_{\alpha i}|^2 |V_{\alpha j}|^2 \sin^2 \frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E},$$

и зависит только от абсолютных значений элементов матрицы смешивания. Таким образом, изучение  $CP$  нарушения в лептонном секторе в экспериментах на выживание невозможно. В общем случае вероятности  $P_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  для антинейтрино получаются из вероятностей  $P_{\alpha\beta}$  заменой  $V \mapsto V^*$  и  $\mathcal{J} \mapsto -\mathcal{J}$ :

$$\begin{aligned} P_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(L) &= \delta_{\alpha\beta} - 4\text{Re} \sum_{i < j}^3 V_{\alpha i}^* V_{\beta i}^* V_{\alpha j} V_{\beta j}^* \sin^2 \frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E} \\ &\quad - 8\mathcal{J} \sum_{\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \sin \frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \sin \frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \sin \frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}, \end{aligned}$$

что равно вероятности обратного перехода  $\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha$ , соответствующему симметрии обращения времени  $T$ :

$$P_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(L) = P_{\beta\alpha}(L).$$

Различие между  $P_{\alpha\beta}(L)$  и  $P_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(L)$  означает нарушение  $CP$ -симметрии, а различие между  $P_{\alpha\beta}(L)$  и  $P_{\beta\alpha}(L)$  – нарушение  $T$ -симметрии. Вследствие  $CPT$ -инвариантности соответствующие разности равны:

$$P_{\alpha\beta}(L) - P_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(L) = P_{\alpha\beta}(L) - P_{\beta\alpha}(L) = 16\mathcal{J} \sum_{\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \sin \frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \sin \frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \sin \frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E},$$

и пропорциональны инварианту  $\mathcal{J}$ .

## 2.2 Осцилляции нейтрино в веществе

При распространении в веществе на явления осцилляций нейтрино оказывают влияние не только лептонное смешивание и массы распространяющихся состояний, но и взаимодействие нейтрино с электронами и нуклонами. Когерентное рассеяние вперёд на частицах среды приводят к появлению у состояний эффективных масс, отличных от вакуумных  $m_i$ , а также изменению кваркового состава. Данный эффект можно описать в терминах эффективного потенциала  $V_{\text{eff}}$ , в поле которого происходит движение нейтрино  $\nu_i$  с вакуумными массами  $m_i$ , приводящего к изменению их фазовых скоростей.

Когерентное рассеяние через реакции нейтрального тока не приводят к относительным фазовым сдвигам – в электрически нейтральной среде вклады от рассеяния на электронах и протонах взаимно компенсируются, а рассеяние на нейтронах универсально для всех флейворов. Таким образом единственной реакцией, проявляющейся в нейтринных осцилляциях является рассеяние на электронах в реакции заряженного тока, возможной только для электронного нейтрино. Эффективный потенциал такого взаимодействия равен:

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{2}G_F n_e,$$

где  $G_F$  – константа Ферми, а  $n_e$  – плотность электронов в сред, а эффективный гамильтониан в базисе флейворных состояний  $\nu_i$  имеет вид:

$$H_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}^0 + V_{\text{eff}}\delta_{\alpha e}\delta_{\beta e} = E + \sum_i V_{\alpha i} \frac{m_i^2}{2E} V_{\beta i}^* + \sqrt{2}G_F n_e \delta_{\alpha e}\delta_{\beta e}, \quad (2.5)$$

где  $H^0$  – свободный гамильтониан. Собственные состояния эффективного гамильтониана  $\nu^M = (\nu_1^M, \nu_2^M, \nu_3^M)^T$  отличны от вакуумных  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^T$ , соответствующие им уровни энергии и матрицу смешивания можно получить диагонализацией (2.5). Для антинейтрино эффективный потенциал и соответствующий член в гамильтониане (2.5) имеет противоположный знак.

## 2.2.1 2х-нейтринные осцилляции

Для простоты рассмотрим влияние вещества с постоянной электронной плотностью на явление осцилляций двух нейтрино  $\nu_e$  и  $\nu_\mu$ . Эффективный гамильтониан (2.5) в этом случае является матрицей  $2 \times 2$ , после выделения бесследовой части представимой в виде [2]:

$$\hat{H} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} + \frac{1}{2}\sqrt{2}G_F n_e + \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos 2\theta + A & \Delta m^2 \sin 2\theta \\ \Delta m^2 \sin 2\theta & -\Delta m^2 \cos 2\theta + A \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

где  $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$  – вакуумная разность масс,  $A = 2V_{\text{eff}}E$  а  $\theta$  – вакуумный угол смешивания  $\nu_1$  и  $\nu_2$ :

$$\begin{aligned} |\nu_1\rangle &= |\nu_e\rangle \cos \theta - |\nu_\mu\rangle \sin \theta \\ |\nu_2\rangle &= |\nu_e\rangle \sin \theta + |\nu_\mu\rangle \cos \theta. \end{aligned}$$

Его диагонализация производится ортогональным преобразованием  $H^M = \frac{1}{2E}\tilde{V}\tilde{m}^2\tilde{V}^\dagger$  с матрицей:

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & \sin \tilde{\theta} \\ -\sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix},$$

и диагональной матрицей  $\tilde{m}^2 = \text{diag}\{\tilde{m}_1^2, \tilde{m}_2^2\}$ , где эффективные массы собственных состояний в веществе равны:

$$\tilde{m}_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ m_1^2 + m_2^2 + A \mp \sqrt{(\Delta m^2 \cos 2\theta - A)^2 + (\Delta m^2 \sin 2\theta)^2} \right].$$

Угол смешивания в веществе  $\tilde{\theta}$  и эффективная разность квадратов масс  $\Delta\tilde{m}^2 = \tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2$  связаны с вакуумными параметрами соотношениями:

$$\sin^2 2\tilde{\theta} = \frac{\sin^2 2\theta}{\cos^2 2\theta(1-\lambda)^2 + \sin^2 2\theta}, \quad \Delta\tilde{m}^2 = \Delta m^2 \frac{\sin 2\theta}{\sin 2\tilde{\theta}}, \quad \lambda = \frac{2\sqrt{2}G_F E_\nu n_e}{\Delta m^2 \cos 2\theta}.$$

Безразмерный параметр  $\lambda$  может быть записан как отношение:

$$\lambda = \frac{L_{\text{vac}}}{L_e \cos 2\theta},$$

где  $L_{\text{vac}}$  длина осцилляций в вакууме и  $L_e = 2\pi/\sqrt{2}G_F n_e$ . Например,  $L_e \approx 110$  км в веществе с плотностью  $\approx 150$  г/см<sup>3</sup>. Из соотношения для эффективной массы следует, что длина осцилляций в веществе равна:

$$L_M = L_{\text{vac}} \frac{\sin 2\tilde{\theta}}{\sin 2\theta} = L_{\text{vac}} \left[ 1 + \left( \frac{L_{\text{vac}}}{L_e} \right)^2 - \frac{2L_{\text{vac}}}{L_e} \cos 2\theta \right]^{-1/2}.$$

, а собственные состояния гамильтониана в веществе связаны с флейворными как:

$$\begin{aligned} |\nu_1^M\rangle &= |\nu_e\rangle \cos \tilde{\theta} - |\nu_\mu\rangle \sin \tilde{\theta} = |\nu_1\rangle \cos(\tilde{\theta} - \theta) - |\nu_2\rangle \sin(\tilde{\theta} - \theta) \\ |\nu_2^M\rangle &= |\nu_e\rangle \sin \tilde{\theta} + |\nu_\mu\rangle \cos \tilde{\theta} = |\nu_1\rangle \sin(\tilde{\theta} - \theta) + |\nu_2\rangle \cos(\tilde{\theta} - \theta). \end{aligned}$$

Таким образом, из (2.3) получаем выражение для осцилляций двухнейтринных осцилляций в веществе:

$$P_{ee} = \sin^2 2\tilde{\theta} \sin^2 \pi \frac{L}{L_M}, \quad P_{e\mu} = 1 - \sin^2 2\tilde{\theta} \sin^2 \pi \frac{L}{L_M}.$$

Взяв для определённости  $|\theta| < \pi/4$  (при этом состояние  $|\nu_1\rangle$  даёт больший вклад в  $|\nu_e\rangle$ ) из связи  $\tilde{\theta}$  и  $\theta$  можно заключить, что в зависимости от знака  $\Delta m^2$  осцилляции в веществе по сравнению с вакуумными могут быть как подавлены. При  $\Delta m^2 < 0$  эффективный смешивание угол смешивания уменьшается:  $\tilde{\theta} < \theta$ , а разность уровней энергии увеличивается:  $|\Delta\tilde{m}^2| > |\Delta m^2|$ . При  $\Delta m^2 > 0$  смешивание усиливается:  $\tilde{\theta} > \theta$  и угол смешивания может достигать максимального значения  $\pi/4$  даже при слабом вакуумном смешивании, а уровни энергии сближаются:  $|\Delta\tilde{m}^2| < |\Delta m^2|$ .

В зависимости от электронной плотности можно выделить три предельных случая:

- при  $\lambda \rightarrow 0$ , что соответствует малой плотности электронов  $n_e \rightarrow 0$ , состояния в веществе переходят в вакуумные и осцилляции зависят только от вакуумных параметров:

$$\theta_M \rightarrow \theta, |\nu_1^M\rangle = |\nu_1\rangle \text{ и } |\nu_2^M\rangle = |\nu_2\rangle;$$

- при  $\lambda \rightarrow \infty$ , или очень большой плотности электронов, наблюдается максимальное смешивание  $\tilde{\theta} \rightarrow \pi/2$ ,  $|\nu_1^M\rangle = -|\nu_\mu\rangle$  и  $|\nu_2^M\rangle = |\nu_e\rangle$ , при этом осцилляции подавлены:

$$P_{e\mu} = \left( \frac{L_e}{L_{\text{vac}}} \right)^2 \sin^2 2\theta \sin^2 \pi L/L_e \ll 1;$$

- при  $\lambda \rightarrow 1$ , что соответствует электронной плотности, удовлетворяющей соотношению  $n_e E_\nu = \Delta m^2 \cos 2\theta / 2\sqrt{2}G_F$ , возникает резонансное усиление осцилляций:  $\tilde{\theta} \rightarrow \pi/4$  и вероятность исчезновения равна:

$$P_{e\mu} = \sin^2 \frac{p}{i} 2 (\sin 2\theta L/L_{\text{vac}}).$$

## 2.2.2 3х-нейтринные осцилляции

Полное рассмотрение случая осцилляции трёх нейтрино  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  и  $\nu_\tau$  требует диагонализации гамильтониана, являющегося матрицей  $3 \times 3$  [13]:

$$\hat{H} = \frac{1}{2E} V \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix} V^\dagger + \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Диагонализация проводится преобразованием  $H^M = \frac{1}{2E} \tilde{V} \tilde{m}^2 \tilde{V}^\dagger$ , где теперь  $\tilde{V}$  – унитарная  $3 \times 3$  матрица смешивания в веществе, связывающая флейворные состояния

$(\nu_e, \nu_\mu^M, \nu_\tau^M)^T$  и собственные состояния эффективного гамильтониана  $(\nu_1^M, \nu_2^M, \nu_3^M)^T$ , а  $\tilde{m}^2 = \text{diag}\{\tilde{m}_1^2, \tilde{m}_2^2, \tilde{m}_3^2\}$  – эффективные массы собственных состояний. Значения эффективных масс даётся решением кубического уравнения и представимы в виде:

$$\begin{aligned}\tilde{m}_1^2 &= m_1^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 3y} \left[ z + \sqrt{3(1 - z^2)} \right], \\ \tilde{m}_2^2 &= m_1^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 3y} \left[ z - \sqrt{3(1 - z^2)} \right], \\ \tilde{m}_3^2 &= m_1^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z\sqrt{x^2 - 3y},\end{aligned}$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}x &= \Delta m_{21}^2 + \Delta m_{31}^2 + A, \\ y &= \Delta m_{21}^2 \Delta m_{31}^2 + A \left[ \Delta m_{21}^2 (1 - |V_{e2}|^2) + \Delta m_{31}^2 (1 - |V_{e3}|^2) \right], \\ z &= \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \frac{2x^3 - 9xy + 27A\Delta m_{21}^2 \Delta m_{31}^2 |V_{e1}|^2}{2(x^2 - 3y)^{3/2}} \right].\end{aligned}$$

Компоненты матрицы смешивания в веществе  $\tilde{V}$  выражаются через вакуумную матрицу смешивания по формуле:

$$\tilde{V}_{\alpha i} = \frac{N_i}{D_i} V_{\alpha i} + \frac{N_i}{D_i} V_{ei} \left[ (\tilde{m}_i^2 - m_j^2) V_{ek}^* V_{\alpha k} + (\tilde{m}_i^2 - m_k^2) V_{ej}^* V_{\alpha j} \right],$$

где

$$\begin{aligned}N_i &= (\tilde{m}_i^2 - m_j^2)(\tilde{m}_i^2 - m_k^2) - A \left[ (\tilde{m}_i^2 - m_j^2) |V_{ek}|^2 + (\tilde{m}_i^2 - m_k^2) |V_{ej}|^2 \right], \\ D_i &= N_i^2 + A |V_{ei}|^2 \left[ (\tilde{m}_i^2 - m_j^2) |V_{ek}|^2 + (\tilde{m}_i^2 - m_k^2) |V_{ej}|^2 \right],\end{aligned}$$

а по индексам  $j, k$  ведётся суммирование от 1 до 3 так, что  $i, j, k$  различны.

Эффективные массы и элементы матрицы смешивания в веществе зависят от знака разности масс  $\Delta m_{31}^2$ , что позволяет измерять иерархию масс в экспериментах, где эффекты вещества оказывает существенное влияние на осцилляции нейтрино.

# Глава 3

## Статистический анализ

### 3.1 Функция правдоподобия и $\chi^2$

Пусть в результате эксперимента был получен набор из  $k$  независимых наблюдаемых величин  $(n_1, n_2, \dots, n_k) \equiv \mathbf{n}$ , а теоретическая модель эксперимента зависит от  $m$  параметров  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \equiv \boldsymbol{\theta}$  и предсказывает средние значения наблюдаемых  $(\mu_1(\boldsymbol{\theta}), \mu_2(\boldsymbol{\theta}), \dots, \mu_k(\boldsymbol{\theta})) \equiv \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})$ . Тогда в предположении справедливости справедливости теоретической гипотезы при фиксированных параметрах  $\boldsymbol{\theta}$  вероятность получить в эксперименте наблюдение  $\mathbf{n}$  запишется как:

$$P(\mathbf{n}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^k P_k(n_k|\mu_k(\boldsymbol{\theta})), \quad (3.1)$$

где вероятность  $P_k(n_k|\mu_k)$  описывает статистические флуктуации при измерении величины  $n_k$ .

Рассматривая  $P(\mathbf{n}|\boldsymbol{\theta})$  при фиксированном наблюдении  $\mathbf{n}$  как функция параметров теории  $\boldsymbol{\theta}$ , можно интерпретировать её как характеристику степени соответствия соответствия теоретической модели наблюдаемым данным. Рассматриваемая таким образом функция  $P(\mathbf{n}|\boldsymbol{\eta})$  не имеет прямого смысла вероятностной меры, так как в общем случае она не является нормированной на единицу:

$$\int \mathbf{d}^m \boldsymbol{\theta} P(\mathbf{n}|\boldsymbol{\theta}) \neq 1,$$

и называется *функцией правдоподобия*  $L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta})$ :

$$L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}) \equiv L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{n}) = P(\mathbf{n}|\boldsymbol{\theta}), \quad \mathbf{n} \text{ фиксировано.}$$

Согласно данной интерпретации из  $L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}_1) > L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}_2)$  следует, что набор параметров  $\boldsymbol{\theta}_1$  описывает наблюдение лучше, чем другой набор параметров  $\boldsymbol{\theta}_2$ , а отношение правдоподобностей  $\frac{L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}_1)}{L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}_2)}$  даёт некоторую количественную оценку того, насколько лучше.

Таким образом, процедура нахождения параметров  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , наилучшим образом соответствующие экспериментально измеренным величинам  $\mathbf{n}$  сводится к поиску максимума функции правдоподобия в пространстве всех возможных значений  $\boldsymbol{\theta}$ :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}),$$

или, что эквивалентно, поиску минимума логарифмической функции правдоподобия  $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta})$ , то есть удвоенного логарифма функции правдоподобия, взятого с обратным знаком:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}) = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} [-2 \ln L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta})] = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \left[ -2 \sum_{i=1}^k \ln P_i(n_i, \mu_i(\boldsymbol{\theta})) \right]. \quad (3.2)$$

Эквивалентом отношения  $\frac{L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}_1)}{L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}_2)}$  для логарифмической функции правдоподобия будет являться разность

$$\Delta \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}_1; \boldsymbol{\theta}_2) = \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}_1) - \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}_2) = -2 \ln \frac{L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}_1)}{L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}_2)},$$

тем меньшая, чем лучше теория с параметрами  $\boldsymbol{\theta}_1$  описывает предсказания  $\mathbf{n}$  по сравнению с параметрами  $\boldsymbol{\theta}_2$ .

В экспериментах по физике частиц наблюдаемыми величинами, как правило, являются число зарегистрированных взаимодействий с определёнными признаками происходящих с постоянной интенсивностью, статистические флуктуации которых описываются распределением Пуассона:

$$P_i(n_i, \mu_i) = \frac{\mu_i^{n_i}}{n_i!} e^{-\mu_i}.$$

В этом случае для логарифмической функции правдоподобия имеем:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}) = -2 \ln L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}) = -2 \sum_{i=1}^k [(n_i - 1)\mu_i(\boldsymbol{\theta}) - \ln n_i!], \quad (3.3)$$

и учитывая, что члены  $\ln n_i!$  постоянны при фиксированном  $\mathbf{n}$  и не меняют поведение функции по  $\boldsymbol{\theta}$ , для оценки параметров получаем:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} [-2(n_i - 1)\mu_i(\boldsymbol{\theta})].$$

В случае большого числа ожидаемых в среднем событий  $\mu_i \gtrsim 100$ , распределение Пуассона с хорошей точностью приближается распределением Гаусса со средним и дисперсией равными  $\mu_i$ , то есть:

$$P_i(n_i, \mu_i) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_i}} \exp \left[ -\frac{(n_i - \mu_i)^2}{2\mu_i} \right] \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n_i}} \exp \left[ -\frac{(n_i - \mu_i)^2}{2n_i} \right] \quad \text{при } \mu_i \approx n_i. \quad (3.4)$$

Соответствующая логарифмическая функция правдоподобия при  $\mathbf{V}_n \equiv \text{diag}\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$  равна:

$$\mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^k \left[ \ln(2\pi n_i) + \frac{(n_i - \mu_i)^2}{n_i} \right] = \sum_{i=1}^k \ln(2\pi n_i) + (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}))^T \mathbf{V}_n^{-1} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})). \quad (3.5)$$

Отбрасывая независимый от варьируемых параметров теории  $\boldsymbol{\theta}$  члены с логарифмом, получаем квадратичную форму:

$$\chi_n^2(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^k \left[ \frac{(n_i - \mu_i)^2}{n_i} \right] = (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}))^T \mathbf{V}_n^{-1} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})),$$

минимизация которой дает оценку максимума правдоподобия  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  параметров теории. В случае, если при фиксированных средних  $\boldsymbol{\mu}$  величины  $n_i$  распределены по нормальному закону с дисперсиями  $\mu_i$ , величина  $\chi_n^2(\boldsymbol{\theta})$  будет распределена по закону  $\chi^2$  с  $k$  степенями свободы.

## 3.2 Методы учета неопределённостей в знании параметров модели

Как правило, на значения параметров  $\boldsymbol{\theta}$  существуют априорные оценки, полученные из предшествующих экспериментов. Для учёта ограничений, накладываемых данными оценками, на допустимое пространство параметров при поиске максимума функции правдоподобия, она взвешивается с функцией  $g(\boldsymbol{\theta})$ , характеризующей иметь реализацию данного набор параметров  $\boldsymbol{\theta}$ , нормированной на единицу. Обычно в качестве  $g(\boldsymbol{\theta})$  принимают гауссов закон распределения со известными средним  $\bar{\boldsymbol{\theta}}$  и ковариационной матрицей  $\mathbf{V}_\theta$ :

$$g(\boldsymbol{\theta}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_\theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\mathbf{V}_\theta|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{V}_\theta^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}}) \right], \quad (3.6)$$

В случае статистической независимости параметров, каждый из которых имеет неопределённость  $\sigma_{\theta_i}$  ковариационная матрица диагональна  $\mathbf{V}_\theta = \text{diag}\{\sigma_{\theta_1}^2, \sigma_{\theta_2}^2, \dots, \sigma_{\theta_m}^2\}$  и функция имеет более простой вид:

$$g(\boldsymbol{\theta}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_\theta) = \prod_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\theta_j}^2}} \exp \left[ -\frac{(\theta_j - \bar{\theta}_j)^2}{2\sigma_{\theta_j}^2} \right], \quad (3.7)$$

Таким образом, считая распределение параметров гауссовым, в качестве функции правдоподобности с учётом заданных неопределённостей получаем:

$$L_n(\boldsymbol{\theta}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_\theta) = g(\boldsymbol{\theta}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_\theta) L_n(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\theta_j}^2}} \exp \left[ -\frac{(\theta_j - \bar{\theta}_j)^2}{2\sigma_{\theta_j}^2} \right] \prod_{i=1}^k P_k(n_k | \mu_k(\boldsymbol{\theta})).$$

### 3.2.1 Штрафные члены

В наиболее общем случае для получения оценки на параметры  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  из наблюдений  $\mathbf{n}$  с учётом априорных неопределённостей, необходимо производить максимизацию функции правдоподобия  $L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta})$  по всем параметрам  $\theta_j$ :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}).$$

Переходом к логарифмической функции правдоподобия:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}) = -2 \ln L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}) = \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}) + m \ln 2\pi + \ln |\mathbf{V}_{\theta}| + (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{V}_{\theta}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}}),$$

оценка  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  с учётом известной неопределённости при постоянной матрице ковариации  $\mathbf{V}_{\theta}$  сводится к минимизации:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} [\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}) + (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{V}_{\theta}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}})], \quad (3.8)$$

или для случая статистически независимых параметров  $\boldsymbol{\theta}$  (3.7):

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \left[ \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{j=1}^m \frac{(\theta_j - \bar{\theta}_j)^2}{\sigma_{\theta_j}^2} \right].$$

Дополнительные по сравнению с (3.2) квадратичные по  $\boldsymbol{\theta}$  слагаемые называются *штрафными членами* (или *pull-членами*) [14] и эффективно ограничивают область минимизации: при  $|\theta_j - \bar{\theta}_j| \gg \sigma_j$  логарифмическая функция правдоподобия велика вне зависимости от предсказанных средних  $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})$ , при  $|\theta_j - \bar{\theta}_j| \lesssim \sigma_j$  вклад штрафных членов незначителен.

### 3.2.2 Ковариационная матрица в приближении гауссовой статистики

Если оценка наилучших значений части параметров, входящих в набор  $\boldsymbol{\theta}$ , не является целью анализа, вклад их неопределённости можно учесть усреднением функции правдоподобия  $L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta})$  по этим параметрам:

$$L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}) = \int d^{m_{\eta}} \eta L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}),$$

где  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m_{\xi}}) = (\theta_{p_j})$ ,  $j = 1 \dots m_{\xi}$  – набор из  $m_{\xi}$  параметров из  $\boldsymbol{\theta}$ , оценка которых должна быть получена, а  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m_{\eta}}) = (\theta_{q_j})$ ,  $j = 1 \dots m_{\eta}$  – остальные  $m_{\eta}$  параметров, по которым проводится усреднение,  $m_{\xi} + m_{\eta} = m$ . Оценка  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  с использованием данной усреднённой функции будет равна:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = \arg \max_{\boldsymbol{\xi}} L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}) = -2 \arg \min_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}), \quad (3.9)$$

где  $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}) \equiv -2 \ln L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta})$  – соответствующая логарифмическая функция правдоподобия.

Для наблюдаемых  $\mathbf{n}$ , подчиняющихся гауссовому распределению со статистической ковариационной матрицей  $\mathbf{V}_n$  соответствующая усреднённая функция правдоподобия имеет вид:

$$L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}) = \int \frac{d^{m_{\eta}} \boldsymbol{\eta}}{\sqrt{(2\pi)^k |\mathbf{V}_n|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}))^T \mathbf{V}_n^{-1} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})) \right] g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}). \quad (3.10)$$

При статистической независимости параметров  $\boldsymbol{\eta}$  и  $\boldsymbol{\xi}$ , функция (3.6) распадается на произведения гауссовых функций:

$$g(\boldsymbol{\theta}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}) = g(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{V}_{\xi}) g(\boldsymbol{\eta}; \bar{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{V}_{\eta}), \quad (3.11)$$

где  $\bar{\boldsymbol{\xi}}, \bar{\boldsymbol{\eta}}$  соответствующие средние из  $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ , а  $\mathbf{V}_{\eta}$  и  $\mathbf{V}_{\xi}$  – получаемые из  $\mathbf{V}_{\theta}$  ковариационные матрицы для соответствующих групп параметров, причём  $|\mathbf{V}_{\theta}| = |\mathbf{V}_{\eta}| |\mathbf{V}_{\xi}|$ .

Интегрирование в (3.10) можно произвести аналитически, считая зависимость теоретической модели  $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$  от параметров  $\boldsymbol{\eta}$  линейной:

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{D}(\boldsymbol{\xi}) \Delta \boldsymbol{\eta}, \quad (3.12)$$

где  $\Delta \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta} - \bar{\boldsymbol{\eta}}$ ,  $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}) \equiv \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}, \bar{\boldsymbol{\eta}})$ , а  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\xi}) \equiv \mathbf{D}$  – матрица размерности  $k \times m_{\eta}$ , в общем случае зависящая от  $\boldsymbol{\xi}$ . В случае малых ошибок на параметры  $\boldsymbol{\eta}$  и достаточно слабой зависимости предсказаний  $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$  равенство (3.12) выполняется с матрицей Якоби по переменным  $\boldsymbol{\eta}$  функции  $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$  в качестве матрицы  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\xi})$ :

$$(\mathbf{D}(\boldsymbol{\xi}))_{ij} = \left. \frac{\partial \mu_i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_j} \right|_{\boldsymbol{\eta}=\bar{\boldsymbol{\eta}}}. \quad (3.13)$$

Для данной линейной модели (3.12) из (3.10) и (3.11) получаем:

$$L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\mathbf{V}_n|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}))^T \mathbf{V}_n^{-1} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi})) \right] g(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{V}_{\xi}) \cdot \int \frac{d^{m_{\eta}} \boldsymbol{\eta}}{\sqrt{(2\pi)^{m_{\eta}} |\mathbf{V}_{\eta}|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\eta}^T (\mathbf{V}_{\eta}^{-1} + \mathbf{D}^T \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{D}) \Delta \boldsymbol{\eta} + (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}))^T \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\eta} \right]. \quad (3.14)$$

Гауссов интеграл в (3.14) равен:

$$\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{V}_{\eta}| |\mathbf{V}_{\eta}^{-1} + \mathbf{D}^T \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{D}|}} \exp \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}))^T \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{D} (\mathbf{V}_{\eta}^{-1} + \mathbf{D}^T \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{V}_n^{-1} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi})) \right].$$

Согласно матричному тождеству Вудбери:

$$\mathbf{V}_n^{-1} - \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{D} (\mathbf{V}_{\eta}^{-1} + \mathbf{D}^T \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{V}_n^{-1} = (\mathbf{V}_n + \mathbf{D} \mathbf{V}_{\eta} \mathbf{D}^T)^{-1} \equiv \mathbf{V}_{sys}^{-1}, \quad (3.15)$$

и лемме об определителе:

$$|\mathbf{V}_n| |\mathbf{V}_{\eta}| |\mathbf{V}_{\eta}^{-1} + \mathbf{D}^T \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{D}| = |\mathbf{V}_n| |1 + \mathbf{V}_{\eta} \mathbf{D}^T \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{D}| = |\mathbf{V}_n + \mathbf{D} \mathbf{V}_{\eta} \mathbf{D}^T| = |\mathbf{V}_{sys}|.$$

выражение (3.14) сводится к:

$$L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\mathbf{V}_{sys}|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}))^T \mathbf{V}_{sys}^{-1} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi})) \right] g(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{V}_{\xi}), \quad (3.16)$$

то есть снова к гауссовому виду с новой недиагональной ковариационной матрицей, включающей как статистические флуктуации  $\mathbf{n}$ , так и систематические неопределённости:  $\mathbf{V}_n \mapsto \mathbf{V}_{sys} \equiv \mathbf{V}_n + \mathbf{D}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{V}_{\eta} \mathbf{D}^T(\boldsymbol{\xi})$ . Таким образом при данном подходе нахождение оценки  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  сводится к минимизации функции  $\chi_{\mathbf{n}}^{2*}(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{V}_{sys}(\boldsymbol{\xi})) \equiv -2 \ln L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta})$ :

$$\chi_{\mathbf{n}}^{2*}(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{V}_{sys}(\boldsymbol{\xi})) = \ln |\mathbf{V}_{sys}(\boldsymbol{\xi})| + (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}))^T \mathbf{V}_{sys}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi})) + (\boldsymbol{\xi} - \bar{\boldsymbol{\xi}})^T \mathbf{V}_{\xi}^{-1} (\boldsymbol{\xi} - \bar{\boldsymbol{\xi}}). \quad (3.17)$$

Если в теоретической модели параметры  $\boldsymbol{\eta}$  и  $\boldsymbol{\xi}$  слабо коррелированы и изменения предсказаний  $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$  при вариации параметров  $\boldsymbol{\eta}$  в пределах их неопределённости мало по сравнению со статистическими неопределённостями наблюдения  $\mathbf{n}$ , то

$$|\mathbf{V}_{sys}(\boldsymbol{\xi})| = |\mathbf{V}_n| |1 + \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{D}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{V}_{\eta} \mathbf{D}^T(\boldsymbol{\xi})| \approx |\mathbf{V}_n| (1 + \text{tr}(\mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{D}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{V}_{\eta} \mathbf{D}^T(\boldsymbol{\xi}))) \approx |\mathbf{V}_n|,$$

и пренебрегая членами, зависящими от  $\boldsymbol{\xi}$  вместо функции  $\chi_{\mathbf{n}}^{2*}(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{V}_{sys}(\boldsymbol{\xi}))$  можно минимизировать квадратичную функцию:

$$\chi_{\mathbf{n}}^2(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{V}_{sys}(\boldsymbol{\xi})) = (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}))^T \mathbf{V}_{sys}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi})) + (\boldsymbol{\xi} - \bar{\boldsymbol{\xi}})^T \mathbf{V}_{\xi}^{-1} (\boldsymbol{\xi} - \bar{\boldsymbol{\xi}}). \quad (3.18)$$

Вообще говоря, оценка параметров  $\boldsymbol{\xi}$  через усреднённую функцию правдоподобия (3.9) не совпадает с оценкой с использованием штрафных членов (3.8):

$$\arg \min_{\boldsymbol{\xi}} \chi_{\mathbf{n}}^2(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{V}_{sys}(\boldsymbol{\xi})) \stackrel{\xi}{\neq} \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} [\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}) + (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{V}_{\theta}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}})]$$

однако для линейной теории (3.12) справедливо равенство:

$$\arg \min_{\boldsymbol{\xi}} \chi_{\mathbf{n}}^2(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{V}_{sys}(\boldsymbol{\xi})) \stackrel{\xi}{=} \arg \min_{\boldsymbol{\xi}} \min_{\boldsymbol{\eta}} [\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}) + (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{V}_{\theta}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}})]. \quad (3.19)$$

Действительно, дифференцируя минимизируемое выражение справа в (3.19) по  $\boldsymbol{\eta}$  с учётом (3.11), (3.5) и (3.12) получаем[14]:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} [\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}) + (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{V}_{\theta}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}})] = -2 \mathbf{D}^T \mathbf{V}_n^{-1} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\eta}) + 2 \mathbf{V}_n^{-1} \Delta \boldsymbol{\eta},$$

откуда следует, что минимум достигается при:

$$\Delta \boldsymbol{\eta} = (\mathbf{V}_{\eta}^{-1} + \mathbf{D}^T \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{D}^T)^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{V}_n^{-1} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi})). \quad (3.20)$$

Подстановка (3.20) в правую часть (3.19) и использование тождества (3.15) приводит к равенству

$$\chi_{\mathbf{n}}^2(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{V}_{sys}(\boldsymbol{\xi})) = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} [\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}) + (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{V}_{\theta}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}})].$$

При условии, что наборы параметров  $\boldsymbol{\xi}$  и  $\boldsymbol{\eta}$  слабо коррелированы между собой в линейном приближении оценки  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  получаемые с помощью многомерной минимизации со штрафными членами (3.2) и с помощью усреднённой по  $\boldsymbol{\eta}$  функции правдоподобия (3.9) приблизительно совпадают.

### 3.2.3 Ковариационная матрица в приближении пуассоновой статистики

В случае, когда гауссово приближение (3.4) неприменимо для описания статистических флуктуаций, усреднение функции правдоподобия

$$L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}) = \int d^{m_{\eta}} \eta \prod_{i=1}^k \left[ \frac{\mu_i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})^{n_i}}{n_i!} e^{-\mu_i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})} \right] g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}),$$

не приводит к гауссовому распределению с ковариационной матрицей, учитывающей систематические неопределённости, как в (3.16) даже в случае линейной теории (3.12), однако при малых изменениях теории  $\delta\mu_i(\boldsymbol{\xi}, \Delta\boldsymbol{\mu}) \equiv \mu_i(\boldsymbol{\xi}, \bar{\boldsymbol{\mu}} + \Delta\boldsymbol{\mu}) - \mu_i(\boldsymbol{\xi}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$  при значениях  $\boldsymbol{\eta}$  вблизи  $\bar{\boldsymbol{\eta}}$ , не подавленных  $g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta})$  интегрирование можно произвести с точностью  $O(\delta\mu_i/\mu_i)$ , что даст приближённое выражение усреднённой функции правдоподобия учитывающей гауссовы систематические неопределённости при пуассоновской статистике. Разлагая до первого порядка по  $\delta\mu_i/\mu_i$ , получаем:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k \frac{\mu_i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})^{n_i}}{n_i!} e^{-\mu_i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})} &\approx \prod_{i=1}^k \frac{\mu_i(\boldsymbol{\xi})}{n_i!} \left( 1 + n_i \frac{\delta\mu_i(\boldsymbol{\xi}, \Delta\boldsymbol{\eta})}{\mu_i(\boldsymbol{\xi})} \right) e^{-\mu_i(\boldsymbol{\xi}) - \delta\mu_i(\boldsymbol{\xi}, \Delta\boldsymbol{\eta})} \\ &\approx \prod_{i=1}^k \frac{\mu_i(\boldsymbol{\xi})}{n_i!} e^{-\mu_i(\boldsymbol{\xi})} \exp \left[ \frac{n_i - \mu_i}{\mu_i} \delta\mu_i(\boldsymbol{\xi}, \Delta\boldsymbol{\eta}) \right] \\ &\approx \prod_{i=1}^k \frac{\mu_i(\boldsymbol{\xi})}{n_i!} e^{-\mu_i(\boldsymbol{\xi})} \exp \left[ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}))^T \mathbf{V}_n^{-1} \delta\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}, \Delta\boldsymbol{\eta}) \right], \end{aligned} \quad (3.21)$$

где теперь  $\mathbf{V}_n \equiv \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}$ . С учётом того, что в линейном приближении  $\delta\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}, \Delta\boldsymbol{\eta}) \approx \mathbf{D}(\boldsymbol{\xi})\Delta\boldsymbol{\eta}$  с матрицей  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\xi})$  из (3.13) усреднение по  $\boldsymbol{\eta}$  даёт:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}) &= L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{V}_{\xi}) \int \frac{d^{m_{\eta}} \eta}{\sqrt{(2\pi)^{m_{\eta}} |\mathbf{V}_{\eta}|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{V}_{\eta}^{-1} \Delta\boldsymbol{\eta} + (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}))^T \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{D} \Delta\boldsymbol{\eta} \right] \\ &= L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{V}_{\xi}) \exp \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}))^T \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{D} \mathbf{V}_{\eta}^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{V}_n^{-1} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi})) \right], \end{aligned}$$

где

$$L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{V}_{\xi}) \equiv g(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{V}_{\xi}) \prod_{i=1}^k \left[ \frac{\mu_i(\boldsymbol{\xi})}{n_i!} e^{-\mu_i(\boldsymbol{\xi})} \right].$$

Следовательно, в минимизируемой логарифмической функции правдоподобия  $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta})$  неопределённость параметров  $\boldsymbol{\eta}$  приводит к дополнительным по сравнению с  $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{V}_{\xi}) \equiv -2 \ln L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{V}_{\xi})$  слагаемым:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}) = \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{V}_{\xi}) - (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}))^T \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{D} \mathbf{V}_{\eta}^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{V}_n^{-1} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi})). \quad (3.22)$$

### 3.2.4 Ковариационная матрица в приближении совместной гауссовой и пуассоновой статистик

Если среди наблюдаемых величин  $\mathbf{n}$  есть как набор  $\mathbf{n}^g$  из  $k^g$  распределённых по гауссовому закону со средними  $\boldsymbol{\mu}^g$  и ковариационной матрицей  $\mathbf{V}_n^g$  величин, так и набор  $\mathbf{n}^p$  из  $k^p$  величин, распределённых по Пуассону со средними  $\boldsymbol{\mu}^p$ , для которых гауссово приближение (3.4) неприменимо, усреднение функции правдоподобия по параметрам  $\boldsymbol{\eta}$ :

$$L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}) = \int \frac{d^{m_{\eta}} \boldsymbol{\eta}}{\sqrt{(2\pi)^k |\mathbf{V}_n^g|}} \prod_{i=1}^{k^p} \frac{\mu_i^p(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})^{n_i}}{n_i!} e^{-\mu_i^p(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})} g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}) \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{n}^g - \boldsymbol{\mu}^g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}))^T (\mathbf{V}_n^g)^{-1} (\mathbf{n}^g - \boldsymbol{\mu}^g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})) \right],$$

можно произвести, принимая те же приближения, что и в (3.21), (3.14):

$$L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}) \approx L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{V}_{\xi}) \int \frac{d^{m_{\eta}} \boldsymbol{\eta}}{\sqrt{(2\pi)^k |\mathbf{V}_n^g|}} \exp [(\mathbf{n}^p - \boldsymbol{\mu}^p(\boldsymbol{\xi}))^T (\mathbf{V}_n^p)^{-1} \mathbf{D}^p \Delta \boldsymbol{\eta}] \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\eta}^T (\mathbf{V}_{\eta}^{-1} + (\mathbf{D}^g)^T \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{D}^g) \Delta \boldsymbol{\eta} + (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}))^T \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{D}^g \Delta \boldsymbol{\eta} \right], \quad (3.23)$$

где  $\mathbf{V}^p \equiv \text{diag}\{\mu_1(\boldsymbol{\xi}), \mu_2(\boldsymbol{\xi}), \dots, \mu_{k^p}(\boldsymbol{\xi})\}$ , матрицы  $\mathbf{D}^g \equiv \mathbf{D}^g(\boldsymbol{\xi})$  и  $\mathbf{D}^p \equiv \mathbf{D}^p(\boldsymbol{\xi})$  определяются соответствующими производными средних предсказаний по  $\boldsymbol{\eta}$ :

$$(\mathbf{D}^g(\boldsymbol{\xi}))_{ij} = \left. \frac{\partial \mu_i^g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_j} \right|_{\boldsymbol{\eta}=\bar{\boldsymbol{\eta}}}; \quad (\mathbf{D}^p(\boldsymbol{\xi}))_{ij} = \left. \frac{\partial \mu_i^p(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_j} \right|_{\boldsymbol{\eta}=\bar{\boldsymbol{\eta}}}$$

а функция  $L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{V}_{\xi})$  – функция правдоподобия при средних значениях  $\boldsymbol{\eta} = \bar{\boldsymbol{\eta}}$ :

$$L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{V}_{\xi}) \equiv \frac{g(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{V}_{\xi})}{\sqrt{(2\pi)^k |\mathbf{V}_n^g|}} \prod_{i=1}^{k^p} \left[ \frac{\mu_i^p(\boldsymbol{\xi})}{n_i!} e^{-\mu_i^p(\boldsymbol{\xi})} \right] \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{n}^g - \boldsymbol{\mu}^g(\boldsymbol{\xi}))^T (\mathbf{V}_n^g)^{-1} (\mathbf{n}^g - \boldsymbol{\mu}^g(\boldsymbol{\xi})) \right].$$

Выполняя интегрирование в (3.23) и используя тождества, аналогичные (3.15) для усреднённой функции правдоподобия в случае совместного анализа гауссовых и пуассоновых величин получаем:

$$L_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}) = \frac{g(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{V}_{\xi})}{\sqrt{(2\pi)^k |\mathbf{V}_{sys}^g|}} \prod_{i=1}^{k^p} \left[ \frac{\mu_i^p(\boldsymbol{\xi})}{n_i!} e^{-\mu_i^p(\boldsymbol{\xi})} \right] \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{n}^g - \boldsymbol{\mu}^g(\boldsymbol{\xi}))^T (\mathbf{V}_{sys}^g)^{-1} (\mathbf{n}^g - \boldsymbol{\mu}^g(\boldsymbol{\xi})) + \frac{1}{2} (\mathbf{n}^g - \boldsymbol{\mu}^g(\boldsymbol{\xi}))^T ((\mathbf{V}_n^p)^{-1} \mathbf{D}^p + 2(\mathbf{V}_n^g)^{-1} \mathbf{D}^g) (\mathbf{V}_{\eta}^{-1} + (\mathbf{D}^g)^T (\mathbf{V}_n^g)^{-1} \mathbf{D}^g)^{-1} (\mathbf{D}^p)^T (\mathbf{V}_n^p)^{-1} (\mathbf{n}^g - \boldsymbol{\mu}^g(\boldsymbol{\xi})) \right],$$

при ковариационной матрице  $\mathbf{V}_{sys}^g \equiv \mathbf{V}^g + \mathbf{D}^g(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{V}_{\eta} (\mathbf{D}^g(\boldsymbol{\xi}))^T$  распределения гауссовых величин  $\mathbf{n}^g$ , включающей неопределённости параметров  $\boldsymbol{\eta}$ . Логарифмическая функция правдоподобия равна:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}) &= \chi_{\mathbf{n}^g}^{2*}(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{V}_{sys}^g(\boldsymbol{\xi})) + \mathcal{L}_{\mathbf{n}^p}(\boldsymbol{\xi}; \bar{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\theta}) - \\ &- 2(\mathbf{n}^g - \boldsymbol{\mu}^g(\boldsymbol{\xi}))^T (\mathbf{V}_n^g)^{-1} \mathbf{D}^g (\mathbf{V}_{\eta}^{-1} + (\mathbf{D}^g)^T (\mathbf{V}_n^g)^{-1} \mathbf{D}^g)^{-1} (\mathbf{D}^p)^T (\mathbf{V}_n^p)^{-1} (\mathbf{n}^g - \boldsymbol{\mu}^g(\boldsymbol{\xi})). \end{aligned} \quad (3.24)$$

и включает в качестве слагаемых логарифмические функции правдоподобия для гауссовых величин  $\mathbf{n}^p$  (3.17), пуассоновых величин  $\mathbf{n}^p$  (3.22) и член, описывающий корреляцию между ними вследствие общих неопределённостей величин  $\boldsymbol{\eta}$ .

## Глава 4

# Моделирование эксперимента JUNO

JUNO (Jiangmen Underground Neutrino Observatory) – многоцелевой реакторный эксперимент, нацеленный на изучение явления нейтринных осцилляций электронных антинейтрино на средней базе ( $L \sim 50$  км). Основными задачами эксперимента являются определение иерархии масс нейтрино, точное измерение осцилляционных параметров, исследование потоков реакторных нейтрино. Кроме того возможна также реализация большого числа других физических задач, таких как изучение солнечных, атмосферных и геонейтрино, детектирование нейтрино от сверхновых, поиск экзотических частиц и процессов, в частности стерильных нейтрино. Эксперимент будет расположен на глубине 700 м под землёй на юге Китая в уезде Кайпин округа Цзяньмынь и будет исследовать потоки антинейтрино от реакторных комплексов Тайшань (Taishan) и Янцзян (Yangjiang) с помощью жидкостинцилляционного детектора массой 20 кт с проектным энергетическим разрешением 3% (на 1 МэВ). Начало набора данных запланировано на 2020 год, в настоящее время идёт окончание проектных работ и начало строительства.

Число событий обратного  $\beta$ -распада с лептоном в конечном состоянии в диапазоне энергии от  $E_e^i$  до  $E_e^{i+1}$  даётся выражением:

$$N_e(E_e^i, E_e^{i+1}) = \int_{E_e^i}^{E_e^{i+1}} dE_e \int dE_\nu \frac{d\sigma_{IBD}(E_e, E_\nu)}{dE_e} \sum_k \mathcal{N}_k \Phi_k(E_\nu) P_{ee}^{(k)}(E_\nu), \quad (4.1)$$

где  $\frac{d\sigma_{IBD}(E_e, E_\nu)}{dE_e}$  - дифференциальное по энергии лептона сечение взаимодействия,  $\Phi_k(E_\nu)$  - поток электронных антинейтрино, обозначенного индексом  $k$ ,  $\mathcal{N}_k$  - соответствующий данному потоку нормировочный фактор,  $P_{ee}^{(k)}(E_\nu)$  - вероятность выживания антиэлектронного нейтрино при распространении от источника до детектора.

## 4.1 Потоки антинейтрино от реактора

В работе учтены следующие потоки антинейтрино:

- потоки антинейтрино от двух ближних реакторных комплексов Yangjiang и Taishan, дающие основной вклад в ожидаемое число событий и позволяющие анализировать осцилляционные эффекты на средней базе; в дальнейшем для них принято обозначение *mbr* (англ. *medium baseline reactor*);
- потоки антинейтрино от дальних реакторов Daya Bay и Huizhou на расстоянии  $\gtrsim 200$ км от детектора являющиеся источником фоновых событий;
- потоки геонейтрино от реакций  $\beta$ -распада происходящих в Земле, также представляющие собой низкоэнергичный фон.

Расположение и мощность реакторных комплексов приведена в таблице (4.1) [15]:

Cores	YJ-C1	YJ-C2	YJ-C3	YJ-C4	YJ-C5	YJ-C6
Power (GW)	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9
Baseline(km)	52.75	52.84	52.42	52.51	52.12	52.21
Cores	TS-C1	TS-C2	TS-C3	TS-C4	DYB	HZ
Power (GW)	4.6	4.6	4.6	4.6	17.4	17.4
Baseline(km)	52.76	52.63	52.32	52.20	215	265

Таблица 4.1: Мощность и удалённость ближних реакторных комплексов Yangjiang (YJ), Taishan (TS) и дальних реакторов Daya Bay (DYB) и Huizhou (HZ).

Спектры антинейтрино от распадов изотопов  $^{241}\text{Pu}$ ,  $^{235}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$  и  $^{238}\text{U}$  реакторного топлива [12, 11] и геонейтрино [16] от изотопов  $^{238}\text{U}$  и  $^{232}\text{Th}$  для энергии больше порога реакции обратного  $\beta$ -распада приведены на рис. 4.1 и рис. 4.2 соответственно.

Для нормировки потоков реакторных нейтрино использовалась следующая оценка полного числа событий обратного  $\beta$ -распада на расстоянии  $L$  от источника за время  $t$  в предположении отсутствия осцилляций:

$$N_{unoscill} = \varepsilon \frac{tn_f}{4\pi L} N_p \int d\sigma_{IBD}(E_\nu) S(E_\nu),$$

где  $\varepsilon$  - средняя эффективность детектора,  $n_f$  - число распадов изотопов в реакторе в единицу времени,  $N_p$  - число протонов в детекторе,  $\sigma_{IBD}(E_\nu)$  - полное сечение реакции обратного  $\beta$ -распада,  $S(E_\nu)$  - суммарный спектр антинейтрино. Учитывая среднее энерговыделение одного распада  $\langle E_f \rangle = 205\text{МэВ}$ , выразим число распадов через термическую мощность реактора  $P_T$ :

$$n_f = \frac{P_T}{\langle E_f \rangle} \approx 3,04 \cdot 10^{21} \left( \frac{P_T}{\text{ГВт}} \right).$$

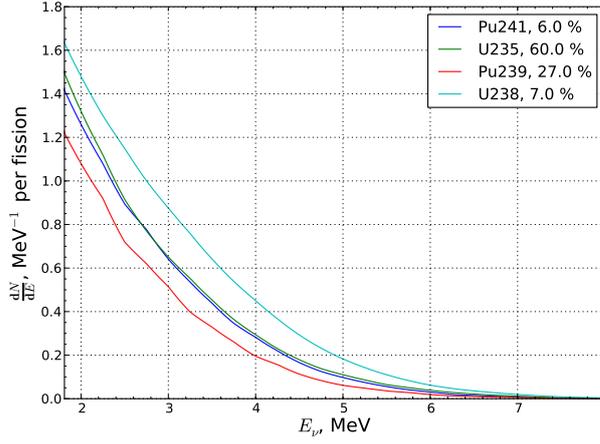


Рис. 4.1: Спектры реакторных нейтрино.

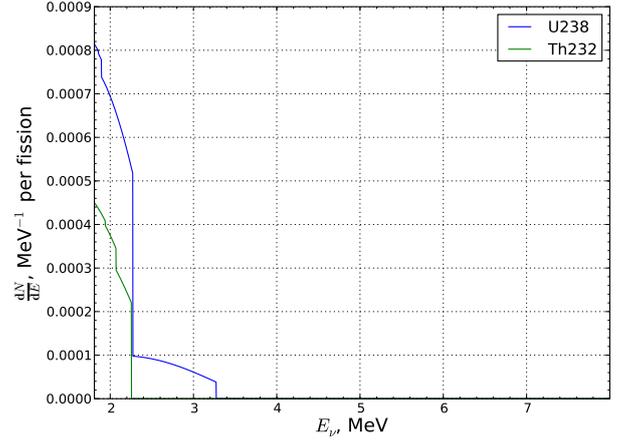


Рис. 4.2: Спектры геонейтрино.

Число протонов в детекторы массы  $M$ :

$$N_p = \alpha_p \frac{M}{m_H} \approx 5,98 \cdot 10^{32} \alpha_p \left( \frac{M}{\text{КТ}} \right), \quad (4.2)$$

где  $\alpha_p$  - доля протонов в веществе. Среднее по спектру сечение взаимодействия равно:

$$\int d\sigma_{IBD}(E_\nu) S(E_\nu) \approx 6,23 \cdot 10^{-43} \text{ см}^2.$$

Таким образом при  $\alpha_p \approx 0,12$  учитывая эффективность детектирования как в эксперименте Daya Bay  $\varepsilon = 78,8\%$ [17] число событий при отсутствии осцилляций равно:

$$N_{unoscill} \approx 2,65 \cdot 10^5 \left( \frac{P_T}{\text{ГВт}} \right) \left( \frac{M}{\text{КТ}} \right) \left( \frac{t}{\text{ГОД}} \right) \left( \frac{L}{\text{КМ}} \right)^{-2}.$$

При массе детектора  $M = 20$  кт за 6 лет число нейтринных событий в гипотезе отсутствия осцилляций от ближних реакторных комплексов оценивается как  $\simeq 4,13 \cdot 10^5$ , от дальних  $\simeq 1,98 \cdot 10^4$ . Исходя из данных оценок и среднего относительного содержания изотопов в ядерном топливе [18]:

$${}^{241}\text{Pu} : {}^{235}\text{U} : {}^{239}\text{Pu} : {}^{238}\text{U} \simeq 0,60 : 0,27 : 0,07 : 0,06,$$

фиксируются нормировочные факторы  $\mathcal{N}_k$  потоков реакторных нейтрино в (4.1).

Для потоков геонейтрино были использованы оценки потоков на поверхности Земли вблизи реактора Daya Bay из работы [19]  $\Phi(\text{U}) = 4,04_{-0,70}^{+0,85} \text{ см}^{-2}\text{-1}$ ,  $\Phi(\text{Th}) = 3,04_{-0,63}^{+1,02} \text{ см}^{-2}\text{-1}$ , что в предположении отсутствия осцилляций соответствует числу событий в 51,7 TNU и 15,0 TNU соответственно, где единица TNU определена как одно событие на  $10^{32}$  протонов мишени за 1 год. Для детектора  $M = 20$  кт за 6 лет используя (4.2) получаем оценку  $\simeq 3,51 \cdot 10^3$  событий от распадов изотопа  ${}^{238}\text{U}$  и  $\simeq 1,02 \cdot 10^3$  от изотопа  ${}^{238}\text{Th}$ , что фиксирует нормировку потоков.

## 4.2 Сечение взаимодействия

Порог реакции процесса  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$  а определяется кинематикой и равен

$$E_\nu \geq \frac{(m_e + m_n)^2 - m_p^2}{2m_p},$$

где  $m_e$ ,  $m_p$ ,  $m_n$  - массы электрона, протона и нейтрона соответственно. В нулевом порядке по  $1/m_p$  кинетическая энергия отдачи нейтрона равна нулю, энергии нейтрино и позитрона однозначно связаны соотношением:

$$E_\nu = E_e^{(0)} - \Delta_{np},$$

где  $\Delta_{np} = m_n - m_p$ . В данном приближении дифференциальное по углу рассеяния  $\theta$  имеет вид [20]:

$$\frac{d\sigma_{IBD}^{(0)}}{d\cos\theta} = \frac{\sigma_0}{2} [(f^2 + 3g^2) + (f^2 - g^2)v_e^{(0)} \cos\theta] E_e^{(0)} p_e^{(0)}, \quad (4.3)$$

где  $\sigma_0 = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{2}$ ,  $G_F$  - постоянная Ферми,  $\theta_C$  - угол Кабиббо,  $f = 1, g = 1.26$  - векторная и аксиальная константы связи слабого взаимодействия, а  $v_e^{(0)} = \sqrt{1 - (m_e/v_e^{(0)})^2}$ ,  $p_e^{(0)} = p_e^{(0)} v_e^{(0)}$  - скорость и импульс позитрона в данном приближении.. Таким образом, проинтегрировав (4.3) по  $\cos\theta$ , для дифференциального по энергии антинейтрино сечения получаем:

$$\frac{d\sigma_{IBD}^{(0)}(E_e, E_\nu)}{dE_e} = \sigma_0 (f^2 + 3g^2) E_e p_e \delta(E_e - E_\nu - \Delta_{np}) = \frac{2\pi^2}{m_e^5 f_{ps} \tau_n} E_e p_e \delta(E_e - E_\nu - \Delta_{np}),$$

где  $\tau_n$  - среднее время жизни свободного нейтрона,  $f_{ps} = 1.7152$  - статистический фактор фазового объема [20].

В первом порядке по  $1/m_p$ , учитывающем эффект отдачи нейтрона, энергии нейтрино и позитрона связаны через угол рассеяния  $\theta$  [21]:

$$E_\nu = \frac{M(E_e^{(1)} + \Delta_{np}) + y^2}{M - E_e^{(1)} + p_e^{(1)} \cos\theta}$$

где  $M = (m_p + m_n)/2$  - средняя масса нуклона,  $y^2 = (\Delta_{np}^2 - m_e^2)/2$ .

Дифференциальное по углу сечение равно [20]:

$$\frac{d\sigma_{IBD}^{(1)}}{d\cos\theta} = \frac{\sigma_0}{2} [(f^2 + 3g^2) + (f^2 - g^2)v_e^{(1)} \cos\theta] E_e^{(1)} p_e^{(1)} - \frac{\sigma_0}{2} \left[ \frac{\Gamma}{2} \right] E_e^{(0)} p_e^{(0)},$$

где

$$\Gamma = 2(f + f_2)g \left[ (2E_e^{(0)} + \Delta_{np})(1 - v_e^{(0)} \cos\theta) - \frac{m_e^2}{E_e^{(0)}} \right] \quad (4.4)$$

$$+ (f^2 + g^2) \left[ \Delta_{np}(1 + v_e^{(0)} \cos\theta) + \frac{m_e^2}{E_e^{(0)}} \right] \quad (4.5)$$

$$+ (f^2 + 3g^2) \left[ (E_e^{(0)} + \Delta_{np}) \left(1 - \frac{1}{v_e^{(0)}} \cos\theta\right) - \Delta_{np} \right] \quad (4.6)$$

$$+ (f^2 - g^2) \left[ (E_e^{(0)} + \Delta_{np}) \left(1 - \frac{1}{v_e^{(0)}} \cos\theta\right) - \Delta_{np} \right] v_e^{(0)} \cos\theta. \quad (4.7)$$

Учитывая, что

$$\frac{dE_\nu}{dE_e^{(1)}} = \frac{M + E_\nu \left(1 - \frac{\cos \theta}{v_e^{(1)}}\right)}{M - E_e^{(1)} \left(1 - \cos \theta v_e^{(1)}\right)},$$

интеграл по  $E_\nu$  в (4.1) удобно заменить на интеграл по  $d \cos \theta$ :

$$\int dE_\nu \frac{d\sigma_{IBD}^{(1)}(E_e, E_\nu)}{dE_e} = \int d \cos \theta \frac{d\sigma_{IBD}^{(1)}(E_e, E_\nu(E_e, \cos \theta))}{d \cos \theta} \frac{dE_{nu}}{dE_e}.$$

## 4.3 Вероятность осцилляций

### 4.3.1 Вероятность выживания в вакууме

В стандартной параметризации матрицы лептонного смешивания вероятность выживания электронного антинейтрино в вакууме имеет вид:

$$P_{ee}(E_\nu, L) = 1 - 2c_{13}^4 c_{12}^2 s_{12}^2 - 2c_{13}^2 s_{13}^2 + \\ + 2c_{13}^4 c_{12}^2 s_{12}^2 \cos 2\Delta_{21} + 2c_{13}^2 s_{13}^2 c_{12}^2 \cos 2\Delta_{31} + 2c_{13}^2 s_{13}^2 s_{12}^2 \cos 2\Delta_{32}, \quad (4.8)$$

где  $L$  - расстояние между источником и детектором,  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ ,  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$  - углы смешивания,  $\Delta_{ij} = \frac{|\Delta m_{ij}^2| L}{4E_\nu}$  - фазы осцилляций.

Так как при моделировании необходимо вычислять вероятность выживания потоков реакторных нейтрино изотопов с одинаковыми спектрами от нескольких приблизительно равноудалённых от детектора источников, то есть суммы вида:

$$\sum_i \mathcal{N}_i P_{ee}(E_\nu, L_i) \Phi(E_\nu), \quad (4.9)$$

где  $|L_i - L_j| \ll L_{i,j}$ ,  $N_i \sim P_{Ti} L_i^{-2}$  и  $P_{Ti}$  - термической мощности реактора, для ускорения расчётов используется приближение основанное на известном тригонометрическом тождестве [18]:

$$\sum_i a_i \cos(x_i + \delta_i) = a \cos(x + \delta),$$

при

$$a^2 = \sum_{i,j} a_i a_j \cos(\delta_i - \delta_j), \quad \text{tg } \delta = \frac{\sum_i \sin \delta_i}{\sum_i \cos \delta_i}. \quad (4.10)$$

Выражая (4.9) через нормировку суммарного потока  $\mathcal{N} = \sum_i \mathcal{N}_i$ , относительные доли потоков отдельных источников  $w_i = N_i/N$ , средневзвешенную удалённость реакторов  $\bar{L} = \sum_i w_i L_i$  и относительное смещение  $\lambda_i = L_i/\bar{L} - 1$ , для осцилляционных членов (4.8) получаем выражения вида:

$$\mathcal{N} \sum_i w_i \cos(2zL_i) = \mathcal{N} \sum_i w_i \cos(2z\bar{L}(1 + \lambda_i)) = \mathcal{N} w \cos(2z\bar{L} + \xi),$$

при  $z = \frac{|\Delta m^2|}{4E_\nu}$ ,  $\Delta m^2 = \Delta m_{21}^2$ ,  $\Delta m_{31}^2$  или  $\Delta m_{32}^2$ , где в соответствии с (4.10):

$$w^2 = \sum_{i,j} w_i w_j \cos(2z\bar{L}(\lambda_i - \lambda_j)) \approx 1 - 4(z\bar{L})^2 \bar{\lambda}^2 + 4(z\bar{L})^4 (\bar{\lambda}^2)^2 + \frac{4}{3}(z\bar{L})^4 \bar{\lambda}^4,$$

$$w \approx 1 - 2(z\bar{L})^2 \bar{\lambda}^2 + \frac{2}{3}(z\bar{L})^4 \bar{\lambda}^4, \quad \bar{\lambda}^n \equiv \sum_i w_i \lambda_i^n,$$

$$\xi = \operatorname{arctg} \frac{\sum_i \sin(2z\bar{L}\lambda_i)}{\sum_i \cos(2z\bar{L}\lambda_i)} \approx \frac{\sum_i \sin(2z\bar{L}\lambda_i)}{\sum_i \cos(2z\bar{L}\lambda_i)} \approx -\frac{4}{3}(z\bar{L})^3 \bar{\lambda}^3.$$

Для представленных в таб. 4.1 десяти реакторов в составе комплексов Yangjiang и Taishan коэффициенты  $\bar{\lambda}^n$  малы:

$$\bar{\lambda}^2 \approx 2,22 \cdot 10^{-5}, \quad \bar{\lambda}^3 \approx 5,24 \cdot 10^{-9}, \quad \bar{\lambda}^3 \approx 7,01 \cdot 10^{-10}.$$

Учитывая значение величины фазы быстрых осцилляций:

$$\frac{|\Delta m_{31}^2| \bar{L}}{4E_\nu} \sim \frac{|\Delta m_{32}^2| \bar{L}}{4E_\nu} \lesssim 10^2$$

данное приближение обеспечивает точность порядка  $O(10^{-5})$  на всём энергетическом диапазоне. Таким образом, при вычислении числа событий потоки от можно заменить одним реактором на эффективном расстоянии:

$$\bar{L} = \frac{\sum_i P_{Ti}/L_i}{\sum_i P_{Ti}/L_i^2} \approx 52,474 \text{ км},$$

эффективной мощностью:

$$\bar{P} = \bar{L}^2 \sum_i \frac{P_{Ti}}{L_i^2} \approx 35,80 \text{ ГВт},$$

и вероятностью выживания:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{ee}(E_\nu) = & 1 - 2c_{13}^4 c_{12}^2 s_{12}^2 - 2c_{13}^2 s_{13}^2 + 2c_{13}^4 c_{12}^2 s_{12}^2 w_{21}(E_\nu) \cos 2\bar{\Delta}_{21} + \\ & + 2c_{13}^2 s_{13}^2 c_{12}^2 w_{31}(E_\nu) \cos 2\bar{\Delta}_{31} + 2c_{13}^2 s_{13}^2 s_{12}^2 w_{32}(E_\nu) \cos 2\bar{\Delta}_{32}, \end{aligned}$$

$$w_{ij}(E_\nu) = 1 - 2 \left( \frac{|\Delta m_{ij}^2| \bar{L}}{4E_\nu} \right)^2 \bar{\lambda}^2 + \frac{2}{3} \left( \frac{|\Delta m_{ij}^2| \bar{L}}{4E_\nu} \right)^4 \bar{\lambda}^4,$$

$$\bar{\Delta}_{ij} = \frac{|\Delta m_{ij}^2| \bar{L}}{4E_\nu} \left( 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{|\Delta m_{ij}^2| \bar{L}}{4E_\nu} \right)^2 \bar{\lambda}^3 \right).$$

### 4.3.2 Учет эффектов вещества

Влияние взаимодействия нейтрино с веществом земной коры с постоянной средней электронной плотностью  $N_e$  на вероятность осцилляций характеризуется эффективным показателем преломления:

$$\mu_{ij} = \frac{2\sqrt{2}G_F N_e E_\nu}{\Delta m_{ij}^2} \approx 1,526 \cdot 10^7 \left( \frac{N_e}{\text{моль/см}^3} \right) \left( \frac{E_\nu}{\text{МэВ}} \right) \left( \frac{\text{эВ}^2}{\Delta m_{ij}^2} \right).$$

При плотности земной коры  $\rho = 2.6 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$  ( $N_e \approx 1,3 \text{ моль} \cdot \text{см}^{-3}$ ) для средней энергии в спектре реакторных антинейтрино 4МэВ наибольший показатель преломления  $\mu_{12} \approx 10^{-2}$  а остальные пренебрежимо малы. В первом порядке по  $\mu_{12}$  учёт эффектов вещества в формуле сводится к замене в (4.8) замене угла смешивания  $\theta_{12}$  и разности масс  $\Delta m_{21}^2$  на эффективные значения  $\tilde{\theta}_{12}$  и  $\Delta \tilde{m}_{21}^2$ , связанные соотношениями:

$$\begin{aligned} \sin^2 \tilde{\theta}_{12} &= \sin^2 \theta_{12} (1 - 2\mu_{12} \cos^2 \theta_{12}), \\ \Delta \tilde{m}_{21}^2 &= \Delta m_{21}^2 (1 + \mu_{12} \cos^2 2\theta_{12}). \end{aligned}$$

На рис. 4.3 показана вероятность выживания  $P_{ee}$  на расстоянии 52км в зависимости от энергии. Вблизи энергии  $E_\nu = 3 \text{ МэВ}$  вклад эффектов вещества в вероятность составляет несколько процентов.

## 4.4 Моделирование отклика детектора

### 4.4.1 Разрешение энергии

Суммарная энергия  $E_{true}$  излучаемая в детекторе при каждом событии обратного  $\beta$ -распада складывается из начальной энергии испущенного в реакции позитрона и массы проаннигилировавшего с ним электрона:  $E_{true} = E_e + m_e$ . Однако вследствие флуктуаций собранных фотоэлектронов, реконструированная энергия события  $E_{vis}$  в общем случае будет отличаться от излученной энергии  $E_{true}$ , что вносит существенные неопределённости в наблюдаемый спектр событий. Для учёта данной неопределённости при анализе теоретический спектр событий  $N_{true}(E_{true})$  сворачивается с функцией разрешения детектора  $r(E_{vis}, E_{true})$ , характеризующей вероятность реконструкции события с излученной энергией  $E_{true}$  как события с энергией  $E_{vis}$ :

$$N(E_{vis}) = \int dE_{true} N_{true}(E_{true}) r(E_{vis}, E_{true}).$$

В простейшем случае в качестве функции разрешения можно выбрать гауссово распределение с переменной дисперсией, зависящей от энергии события:

$$r(E_{vis}, E_{true}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(E_{true})}} \exp \left[ -\frac{(E_{vis} - E_{true})^2}{2\sigma(E_{true})^2} \right].$$

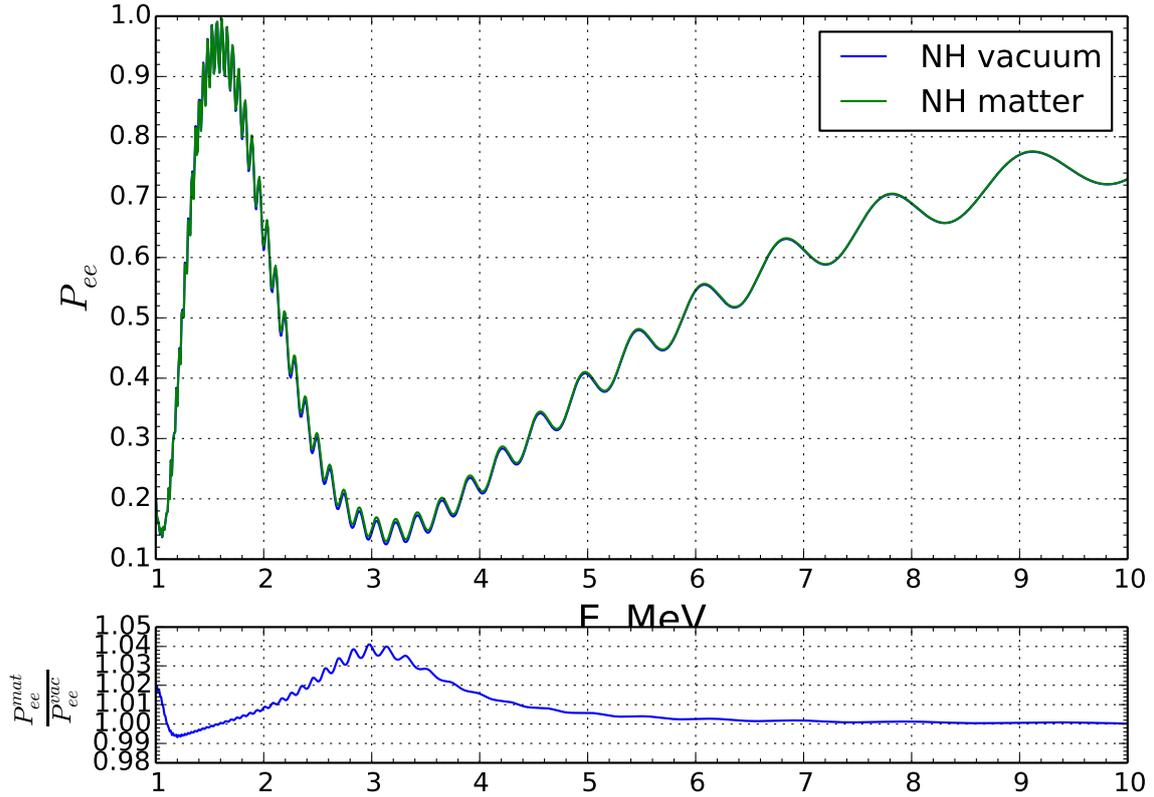


Рис. 4.3: Вероятность выживания  $P_{ee}$  в вакууме и веществе Земли,  $\Delta m_{ee}^2 = 2,59 \cdot 10^{-3} \text{эВ}^2$ , нормальная иерархия.

Относительная ширина параметризуется как:  $b$

$$\frac{\sigma(E_{true})}{E_{true}} = \frac{\delta E_{res}}{\sqrt{E_{true}/\text{МэВ}}}.$$

Параметр  $\delta E_{res}$  определяет характерную неопределённость восстановления энергии для события с энергией 1МэВ и имеет величину порядка нескольких процентов.

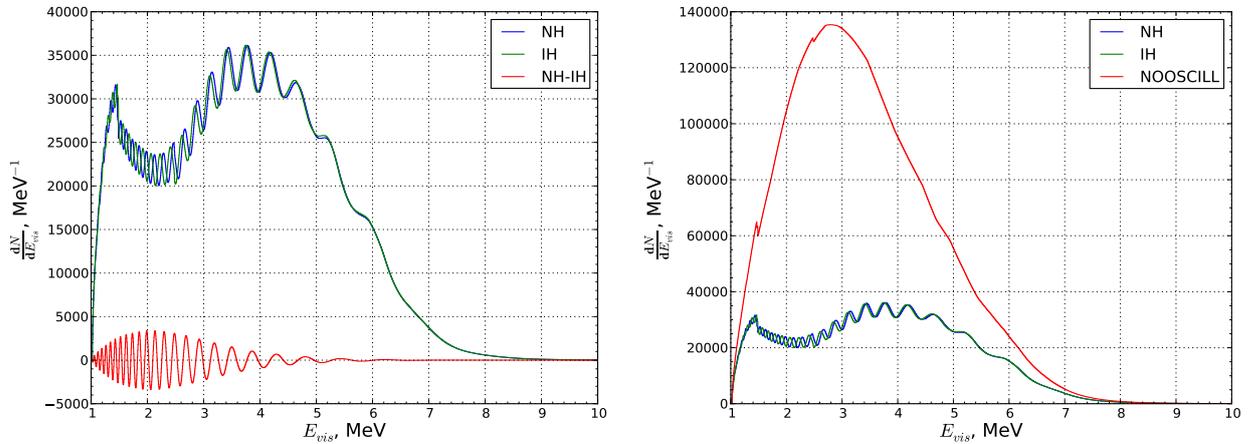
Для спектра, представленного в виде гистограммы, свёртка с функцией разрешения производится после интегрирования по  $E_{true}$  в пределах одного бина гистограммы:

$$\begin{aligned} N_{vis}^i &= \sum_j r \left( \frac{E_{vis}^i + E_{vis}^{i+1}}{2}, \frac{E_{true}^j + E_{true}^{j+1}}{2} \right) (E_{true}^{j+1} - E_{true}^j) N_{true}^j \\ &= \sum_j r \left( \frac{E_{vis}^i + E_{vis}^{i+1}}{2}, \frac{E_{true}^j + E_{true}^{j+1}}{2} \right) (E_{true}^{j+1} - E_{true}^j) N_e(E_{true}^j - m_e, E_{true}^{j+1} - m_e). \end{aligned}$$

## 4.5 Ожидаемые числа событий

Рассчитанные спектры для различных иерархий при фиксированной атмосферной разности масс  $\Delta m_{ee}^2 = 2,59 \cdot 10^{-3} \text{эВ}^2$  и идеальном энергетическом разрешении

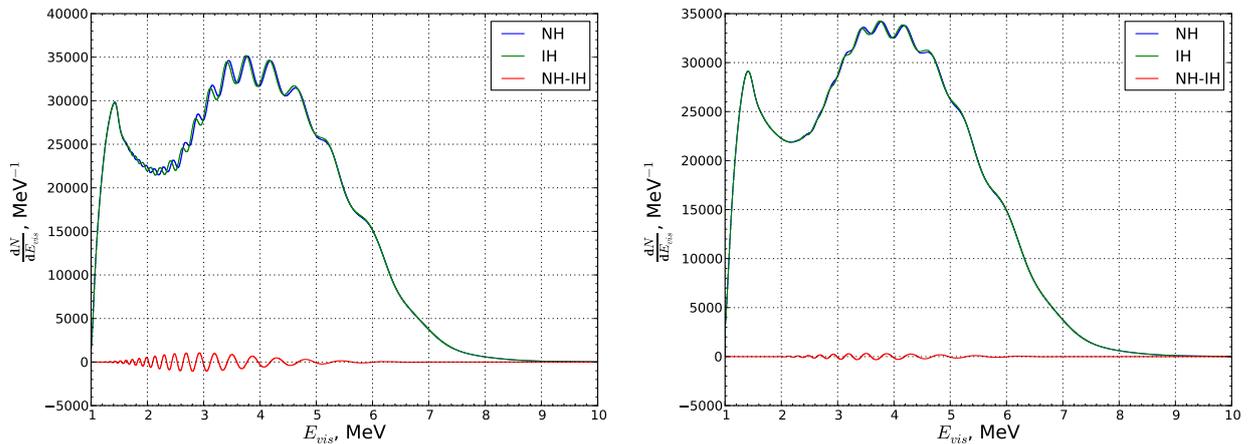
представлены на рис. 4.4, где также приведено сравнение со спектром в гипотезе отсутствия осцилляций. Видно, что вследствие осцилляций на номинальном расстоянии выживают лишь  $\sim 30\%$  излученных антинейтрино.



(а) гипотезы нормальной (NH) и обратной (b) сравнение с гипотезой отсутствия осцилляций (NOOSCILL) иерархий (IH)

Рис. 4.4: Ожидаемые спектры для нормальной (NH) и обратной (IH) иерархий и разность между ними при фиксированной разности масс  $\Delta m_{ee}^2 = 2,59 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$  и идеальной реконструкции энергии.

Влияние конечного энергетического разрешения детектора продемонстрировано на рис. 4.5а и рис. 4.5b.



(а) энергетическое разрешение  $\delta E_{res} = 3\%$  (b) энергетическое разрешение  $\delta E_{res} = 5\%$

Рис. 4.5: Ожидаемые спектры при фиксированной разности масс  $\Delta m_{ee}^2 = 2,59 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$  с учётом энергетического разрешения.

Для анализа использовалось разбиение предсказываемого спектра на бины переменной ширины, так чтобы число событий в каждом из них было  $\gtrsim 200$  для примени-

мости гауссового приближения, и ширина бина была примерно равна энергетическому разрешению. На рис. 4.6 представлены спектр из рис. 4.5а после разбиения на бины.

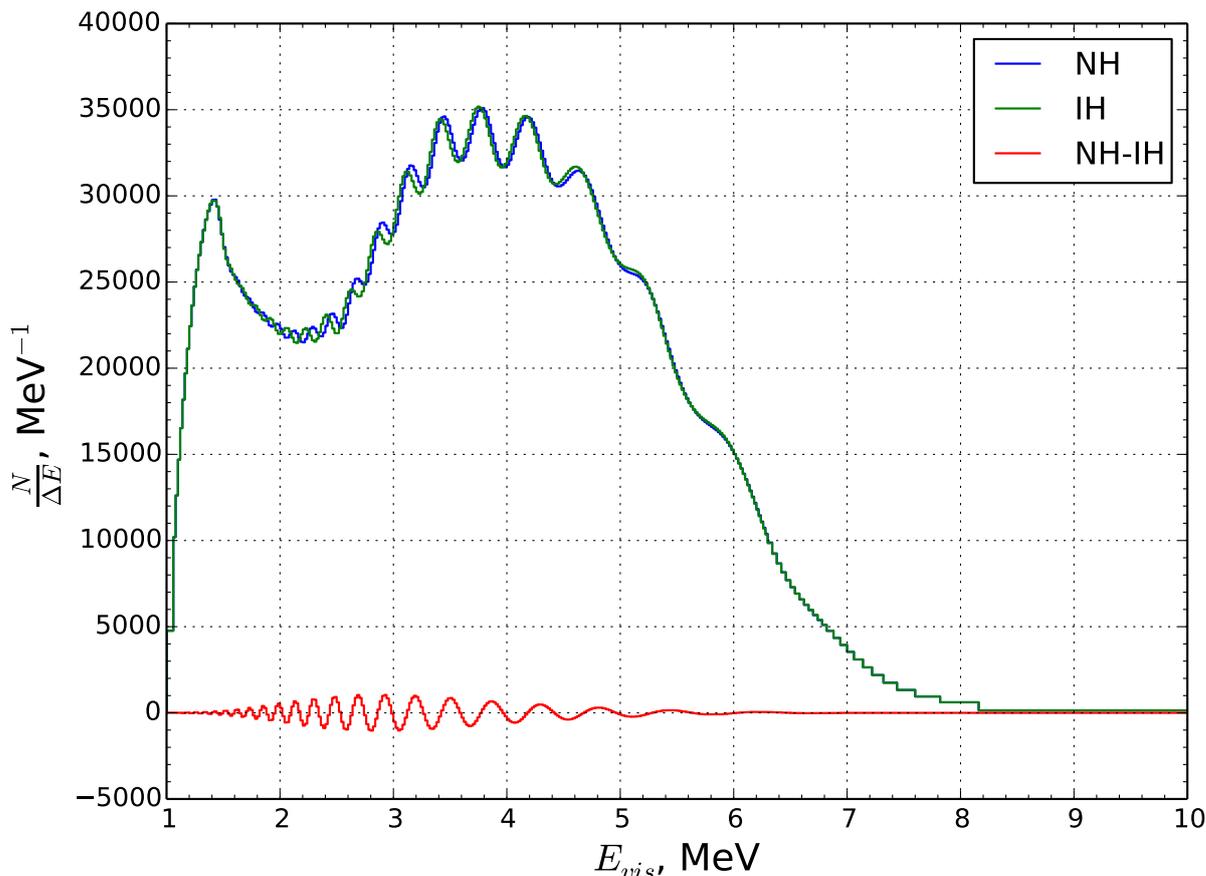


Рис. 4.6: Спектр на рис. 4.5а после разбиение на бины по энергии.

## 4.6 Учтённые неопределённости

При анализе эксперимента учтено влияние следующих систематических неопределённостей:

- ошибки на значения углов смешивания:  $\delta \sin^2 \theta_{12} = 0,017$ ,  $\delta \sin^2 \theta_{13} = 0,0025$  и солнечной разности масс  $\delta \Delta m_{21}^2 = 0,24 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2$ ;
- ошибка на атмосферную разность масс  $\delta \Delta m_{atm}^2 = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$ ;
- некоррелированные ошибки на спектр реакторных (3%) и геонейтрино (20%) от каждого реакторного изотопа;
- неопределённость параметра разрешения энергии  $\delta E_{res}$  10%.

Указанные неопределённости учтены в линейном приближении в ковариационной матрице, за исключением ошибки на атмосферную разность масс  $\Delta_{ee}$ , для которой линейное приближение не применимо из-за большой величины и быстроосциллирующего характера зависимости рассчитываемого спектра.

### 4.6.1 Ковариационная матрица

Влияние учтённых систематических неопределённостей на ожидаемые предсказания после разбиения на бины по энергии изображена на рис. 4.7.

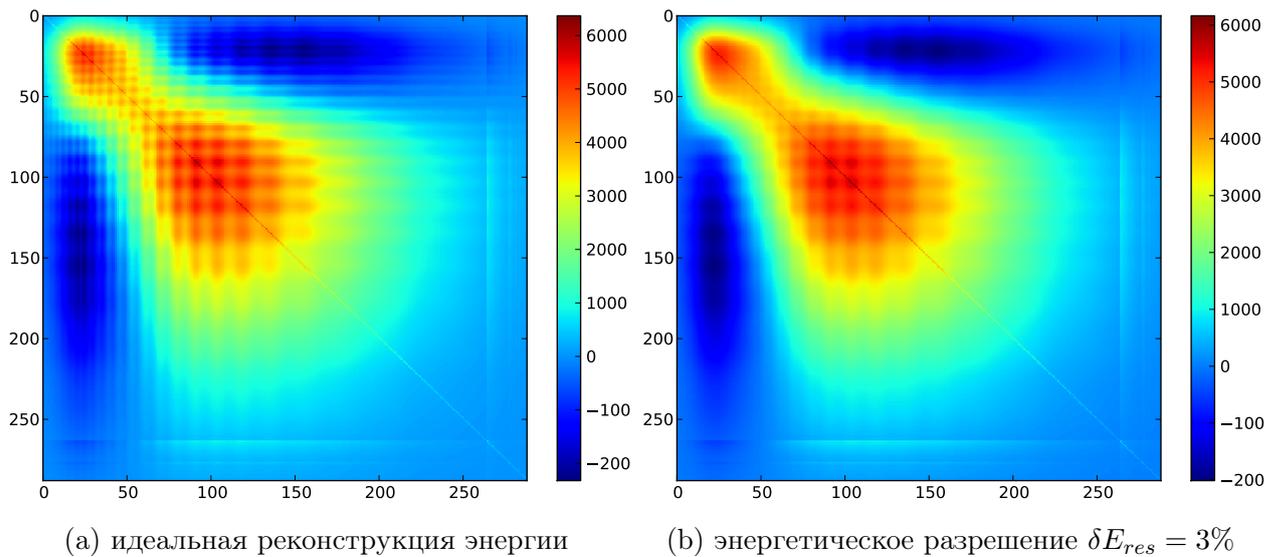


Рис. 4.7: Ковариационная матрица,  $\Delta m_{ee}^2 = 2,59 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$ , нормальная иерархия.

# Глава 5

## Моделирование эксперимента NOVA

NOVA (NuMI Off-Axis  $\nu_e$  Appearance) – ускорительный эксперимент с длинной базой, изучающий переходы мюонных нейтрино в электронные. Основными задачами эксперимента является точное измерение осцилляционных параметров, определение иерархии масс нейтрино и измерение эффектов  $CP$ -нарушения в лептонном секторе. В эксперименте используются два детектора вне оси пучка нейтрино (off-axis) NuMI: ближний детектор массой 220 т, находящийся в Фермилабе на расстоянии  $\sim 1$  км используемый для калибровок потоков и сечений, и дальний детектор массой 14 кт на расстоянии 810 км для исследования осцилляций на длинной базе. Оба детектора жидкосцинтилляционные и имеют сходное строение, различаясь объемом и массой. На настоящий момент эксперимент запущен, ведётся набор данных. Планируется, что из шести лет работы первые три года будет набрана статистика от нейтринного пучка для исследования переходов  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , за последующие три – от антинейтринного пучка для исследования событий  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$ .

### 5.1 Потоки нейтрино и антинейтрино от ускорителя

#### 5.1.1 Потоки вне оси

Детекторы эксперимента NOVA расположены под углом 14 мрад от оси пучка, что обусловлено необходимостью получения потока нейтрино с узким спектром вокруг энергии  $\bar{E} \approx 2$  ГэВ для наблюдения максимального эффекта осцилляций  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ . Действительно, исходя из кинематики двухчастичного распада заряженных пионов:

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu),$$

зависимость энергии нейтрино от энергии распадающегося пиона в лабораторной системе отсчета имеет вид:

$$E_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2E_\pi(1 - v_\pi \cos \Theta_\nu)}, \quad (5.1)$$

где нейтрино считается безмассовым,  $m_\pi$ ,  $m_\mu$  – масса пиона и мюона соответственно,  $v_\pi = |\mathbf{p}_\pi|/E_\pi$  – скорость пиона,  $\Theta_\nu$  – угол вылета нейтрино к направлению импульса пиона. Зависимость энергии нейтрино от энергии распадающегося пиона будет минимальна при угле  $\Theta_\nu = \Theta_\nu^0$ , удовлетворяющем условию [22]:

$$\frac{dE_\nu}{dE_\pi} = -\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2E_\pi^2(1 - v_\pi \cos \Theta_\nu)^2} \left(1 - \frac{1}{v_\pi} \cos \Theta_\nu\right) \Big|_{\Theta_\nu = \Theta_\nu^0} = 0,$$

откуда следует, что  $\cos \Theta_\nu^0 = v_\pi$ . При релятивистских энергиях  $\gamma \equiv \frac{E_\pi}{m_\pi} \gg 1$  угол вылета  $\Theta_\nu$  мал и так как скорость пиона приближённо равна

$$v_\pi = \sqrt{1 - \left(\frac{m_\pi}{E_\pi}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2},$$

во втором порядке по  $\gamma^{-1}$  для угла  $\Theta_\nu^0$  получаем:

$$\Theta_\nu^0 = \frac{1}{\gamma}. \quad (5.2)$$

Энергия вылетающего на такой угол нейтрино согласно (5.1) равна

$$E_\nu(\Theta_\nu^0) = \gamma \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} = \gamma E_\nu^*, \quad (5.3)$$

где  $E_\nu^* \approx 30$  МэВ – энергия вылетающего нейтрино в системе покоя пиона. Для номинального (LE) положения мишени, обеспечивающего длину свободного пробега пионов, соответствующую распадной длине при энергиях  $E_\pi = 10$  ГэВ исходя из (5.2) оптимальный угол  $\Theta_\nu^0$  равен

$$\Theta_\nu^0 = \frac{139,6 \text{ МэВ}}{10 \text{ ГэВ}} \approx \frac{1}{71,6} \approx 14 \text{ мрад},$$

а соответствующая энергия нейтрино (5.3):

$$E_\nu(\Theta_\nu^0) \approx \frac{1}{71,6} E_\nu^* \approx 2,1 \text{ ГэВ}.$$

Спектры потока мюонных нейтрино для разных углов изображены на рис. 5.1.

В данной работе для расчёта средних чисел событий использовались спектры, изображённые на рис. 5.2 рассчитанные программным пакетом коллаборации NOVA и нормированные на число мюонных событий в гипотезе отсутствия осцилляций из работы [23].

## 5.2 Сечения взаимодействия

В области энергии эксперимента NOVA (0,1 – 10 ГэВ) существует три типа процессов нейтринного рассеяния, дающие вклад в полное сечение [24]:

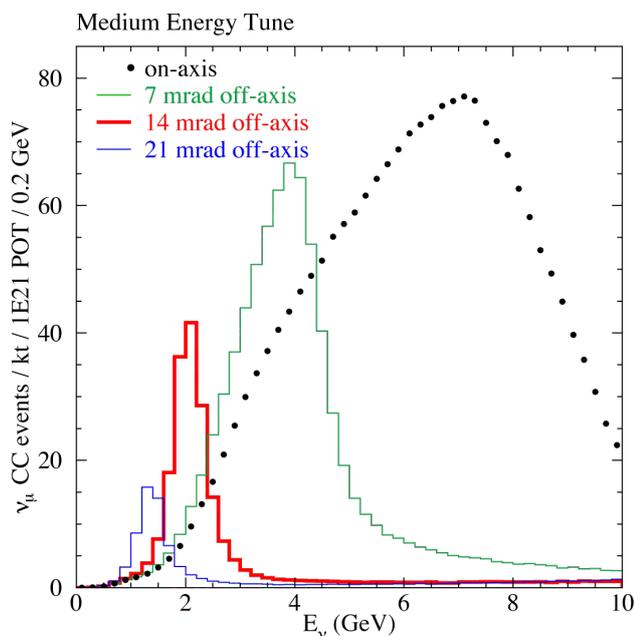
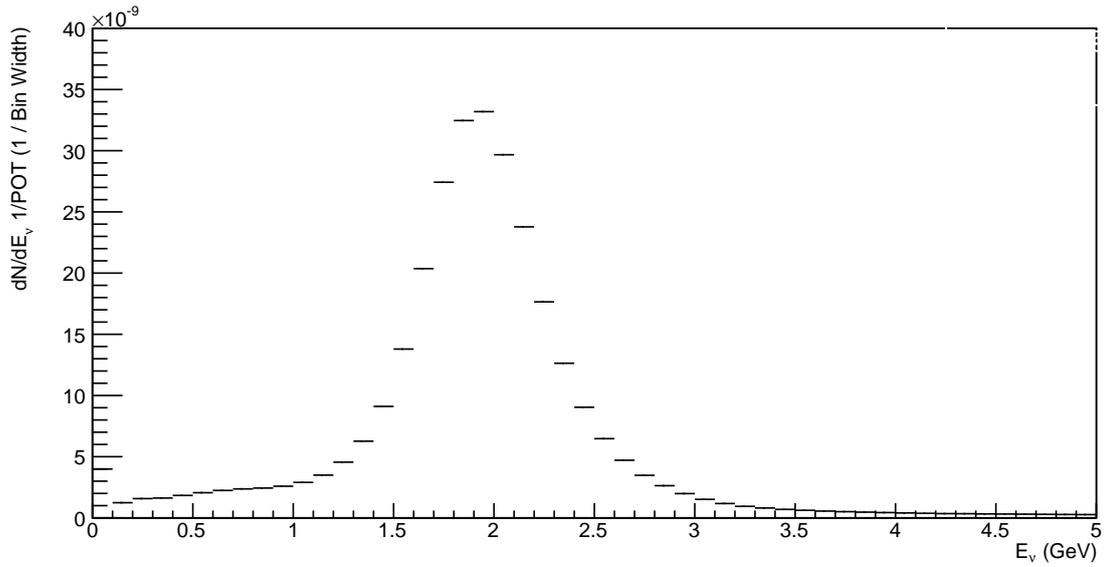


Рис. 5.1: Спектры мюонных нейтрино в гипотезе отсутствия осцилляций для разных углов вне оси пучка.

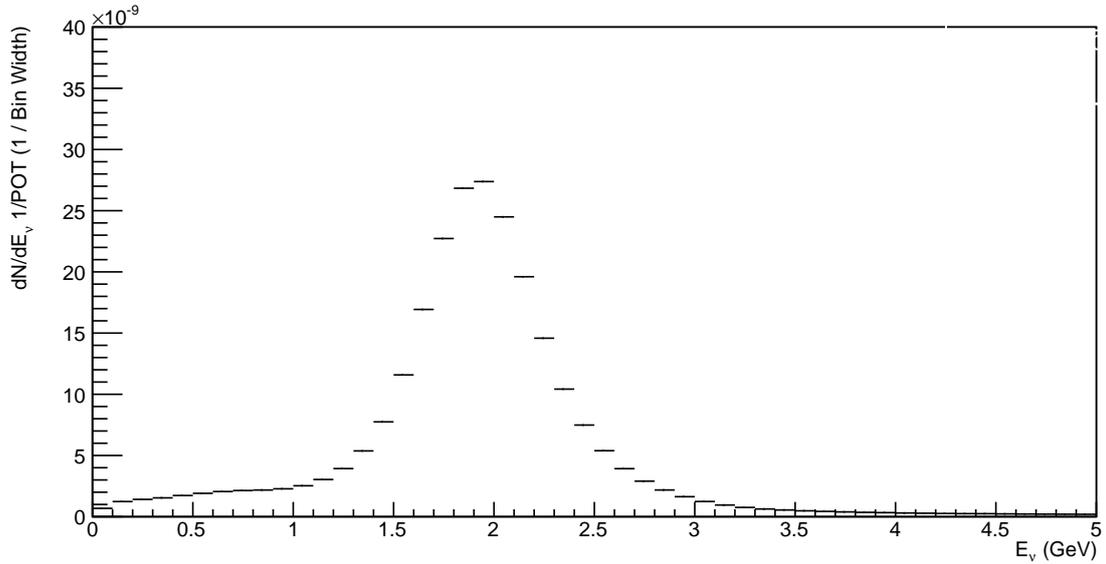
- *квазиупругое* и *упругое* рассеяние: нейтрино рассеивается на отдельных нуклонах, которые при этом высвобождается из ядра мишени. Процесс может происходить как через заряженный (CC), так и нейтральный (NC) токи, и в зависимости от этого называются квазиупругим и упругим рассеянием соответственно.
- *резонансное* рождение: при взаимодействии с нейтрино нуклон переходит в возбуждённое состояние и получившийся барионный резонанс ( $\Delta$ ,  $N^*$ ) распадается на различные нуклоны и мезоны.
- *глубоко неупругое* рассеяние: при достаточных энергиях нейтрино взаимодействует с отдельными кварками нуклона, приводит к рождению адронных ливней в конечном состоянии.

Вследствие вклада данных процессов взаимодействие нейтрино с мишенью приводит к различным конечным состояниям, такими как один нуклон, пионы, каоны и различные наборы мезонов. Примерное соотношение вкладов процессов по конечным состояниям приведены на рис. 5.3. Для всех трёх классов взаимодействий существуют разработанные теоретические модели, однако вопрос их совместного описания в данной энергетической области представляет существенные трудности. На рис. 5.4 изображены известные экспериментальные сведения по сечению CC-рассеяния нейтрино и антинейтрино в данной области энергий и вклады каждого из типа реакций, полученные Монте-Карло моделированием [24].

Для расчётов чисел событий были учтены только CC-события и использовались теоретические сечения из работ [25, 26, 27] для свободных нуклонов без учёта ядерных



(a) спектр  $\nu_\mu$ , нейтринная мода



(b) спектр  $\bar{\nu}_\mu$ , антинейтринная мода

Рис. 5.2: Спектры нейтринных потоков, использовавшиеся для оценок чувствительности, в относительных единицах.

эффектов. Химический состав вещества детектора взят из работы [28].

### 5.2.1 Квазиупругое взаимодействие

Квазиупругое рассеяние является основным взаимодействием нейтрино с адронами при энергиях  $\lesssim 2$  ГэВ, при этом нейтрино рассеивается на нуклоне как на едином целом, а не на партонных составляющих. При рассеянии заряженным током в конечном состоянии получается лептон и нуклон: протон или нейтрон при рассеянии нейтрино и

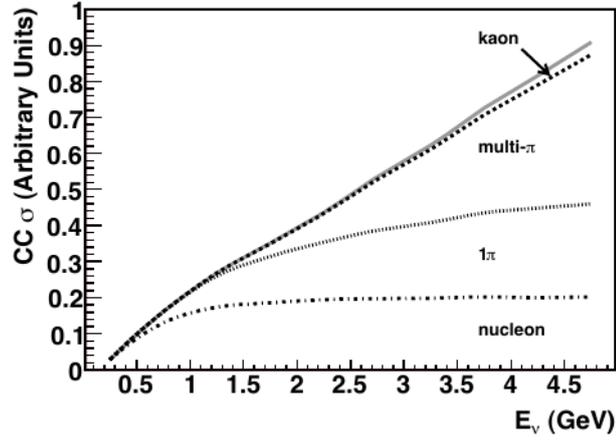


Рис. 5.3: Вклады в инклюзивное сечение СС-взаимодействий нейтрино по конечным состояниям [24].

антинейтрино соответственно:

$$b\nu_l + n \rightarrow l^- + p, \quad \bar{\nu}_l + p \rightarrow l^+ + n.$$

Дифференциальное сечение данных процессов теоретически описывается в виде:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{G_F^2 M^2 |V_{ud}|^2}{8\pi E_\nu^2} \left[ A \pm \frac{(s-u)}{M^2} B + \frac{(s-u)^2}{M^4} C \right],$$

где знак  $+$ ,  $-$  отвечают рассеянию нейтрино и антинейтрино соответственно,  $G_F$  – константа Ферми,  $Q^2$  – квадрат переданного импульса,  $M$  – масса нуклона,  $m$  – масса лептона,  $E_\nu$  – энергия налетающего нейтрино и  $s-u = 4ME_\nu - Q^2 - m^2$ . Величины  $A$ ,  $B$  и  $C$  выражаются через векторные ( $F_1$  и  $F_2$ ), аксиально-векторный ( $F_A$ ) и псевдоскалярный ( $F_P$ ) форм-факторы нуклона:

$$A = \frac{m^2 + Q^2}{M^2} \left[ (1 + \eta)F_A^2 - (1 - \eta)F_1^2 + \eta(1 - \eta)F_2^2 + 4\eta F_1 F_2 - \right. \quad (5.4)$$

$$\left. - \frac{m^2}{4M^2} \left( (F_1 + F_2)^2 + (F_A + 2F_P)^2 - \left( \frac{Q^2}{M^2} + 4 \right) F_P^2 \right) \right] \quad (5.5)$$

$$B = \frac{Q^2}{M^2} F_A (F_1 + F_2),$$

$$C = \frac{1}{4} (F_A^2 + F_1^2 + \eta F_2^2),$$

где  $\eta = Q^2/4M^2$ . Псевдоскалярный формфактор  $F_P$  входит в сечение с множителем  $m^2/M^2$  и при рассмотрении рассеяния  $\nu_e$  им можно пренебречь, векторные формфакторы  $F_1$  и  $F_2$  измеряются на экспериментах по рассеянию электронов, а аксиальный формфактор  $F_A$  обычно параметризуется в дипольном виде как:

$$F_A(Q^2) = \frac{g_A}{\left(1 + \frac{Q^2}{M_A^2}\right)}$$

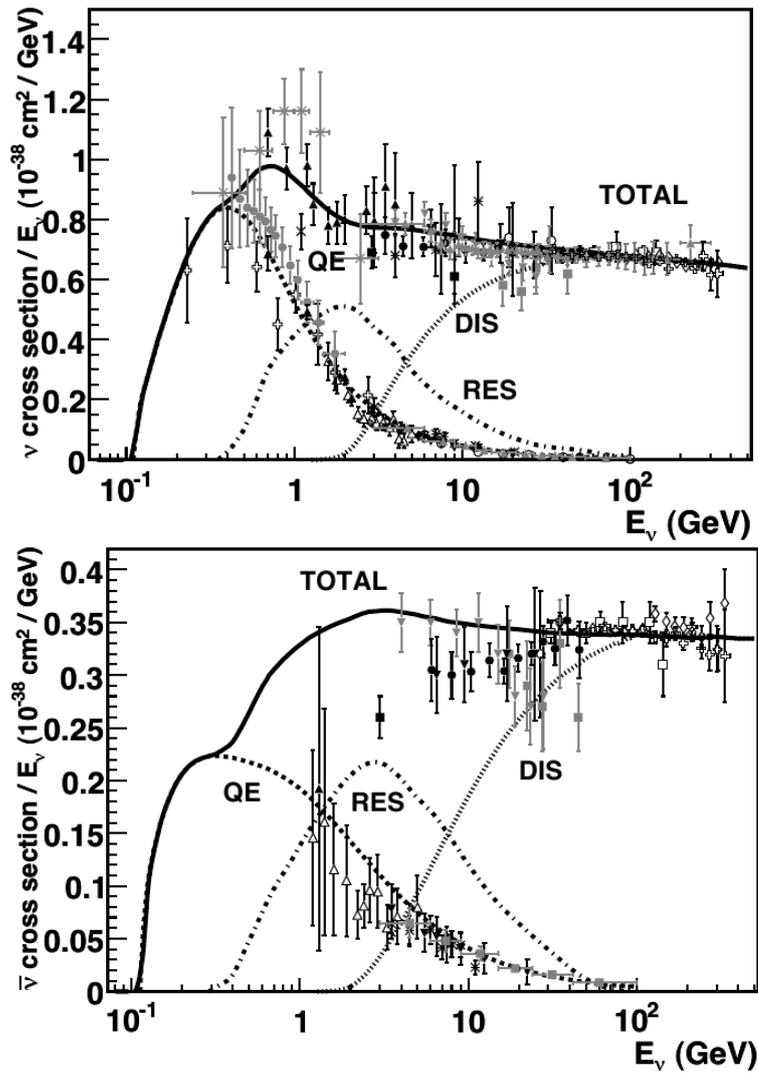


Рис. 5.4: Полное сечение (делённое на энергию) СС-рассеяния  $\nu_\mu$  и  $\bar{\nu}_\mu$  и вклады квазиупругого рассеяния (QE), резонансного рождения (RES) и глубоко неупругого рассеяния (DIS) [24].

двумя параметрами -  $g_A$ , характеризующим аксиальный формфактор при  $Q^2 = 0$ , определяемого из ядерного бета-распада ( $g_A = 1,2694 \pm 0,0028$ ) и аксиальной массой  $M_A$ , значения которой из анализа данных по сечениям рассеяния нейтрино оцениваются в диапазоне от 0,65 ГэВ до 1,35 ГэВ. В работе использовано значение  $M_A^{QES} = 1,000 \pm 0,011$  ГэВ из работы [25], график зависимости сечения квазиупругого взаимодействия  $\nu_e$  и  $\bar{\nu}_e$  изображён на рис. 5.5.

## 5.2.2 Резонансное взаимодействие

При достаточной энергии налетающего нейтрино происходит возбуждение нуклона в резонансное состояние  $N^*$ , которое в последствие распадается, как правило, с образованием пиона. Возможны три канала однопионного рождения в реакциях заря-

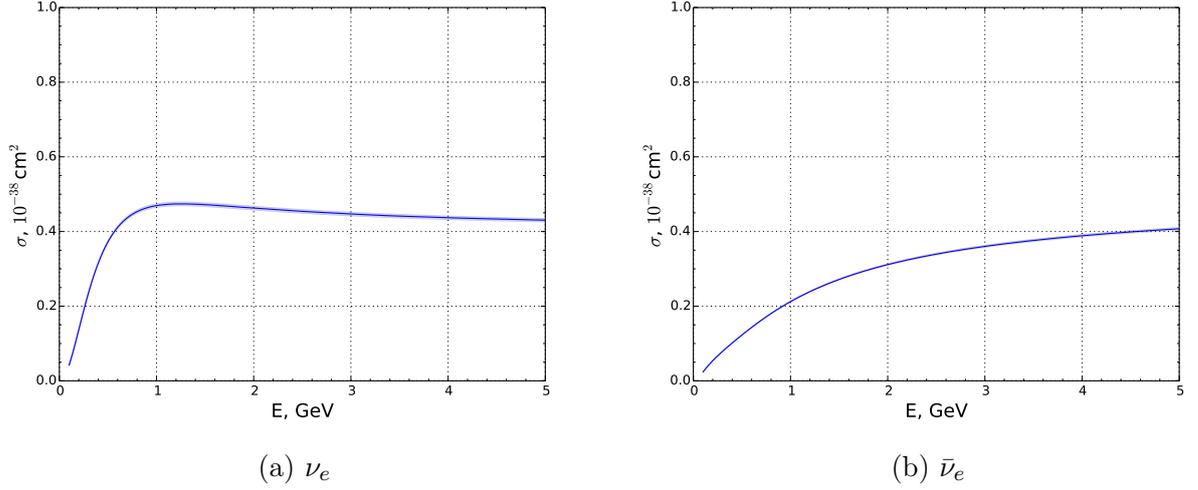


Рис. 5.5: Полное сечение квазиупругого взаимодействия на нуклон детектора NOVA,  $M_A^{QES} = 1,000 \pm 0,011$  ГэВ

женного тока:

$$\begin{aligned}
\nu_l + p &\rightarrow l^- + p + \pi^+, & \bar{\nu}_l + p &\rightarrow l^+ + p + \pi^-, \\
\nu_l + n &\rightarrow l^- + p + \pi^0, & \bar{\nu}_l + p &\rightarrow l^+ + n + \pi^0, \\
\nu_l + p &\rightarrow l^- + n + \pi^+, & \bar{\nu}_l + n &\rightarrow l^+ + n + \pi^-,
\end{aligned}
\tag{5.6}$$

и четыре в реакциях нейтрального тока:

$$\begin{aligned}
\nu_l + p &\rightarrow \nu_l + p + \pi^0, & \bar{\nu}_l + p &\rightarrow \bar{\nu}_l + p + \pi^0, \\
\nu_l + p &\rightarrow \nu_l + n + \pi^+, & \bar{\nu}_l + n &\rightarrow \bar{\nu}_l + n + \pi^0, \\
\nu_l + n &\rightarrow \nu_l + n + \pi^0, & \bar{\nu}_l + n &\rightarrow \bar{\nu}_l + n + \pi^0, \\
\nu_l + n &\rightarrow \nu_l + p + \pi^-, & \bar{\nu}_l + n &\rightarrow \bar{\nu}_l + p + \pi^-.
\end{aligned}
\tag{5.7}$$

При низких энергиях рассматриваемого диапазона основной вклад даёт рождение резонанса  $\Delta(1232)$ . Теоретическое описание резонансного однопионного рождения даётся моделью Rein-Sehgal [29]. В работе использованы сечения из работы [26] со значением значение аксиальной массы  $M_A^{RES} = 1,120 \pm 0,030$  ГэВ, график зависимости сечения резонансного взаимодействия  $\nu_e$  и  $\bar{\nu}_e$  изображён на рис. 5.6. квазиупругого

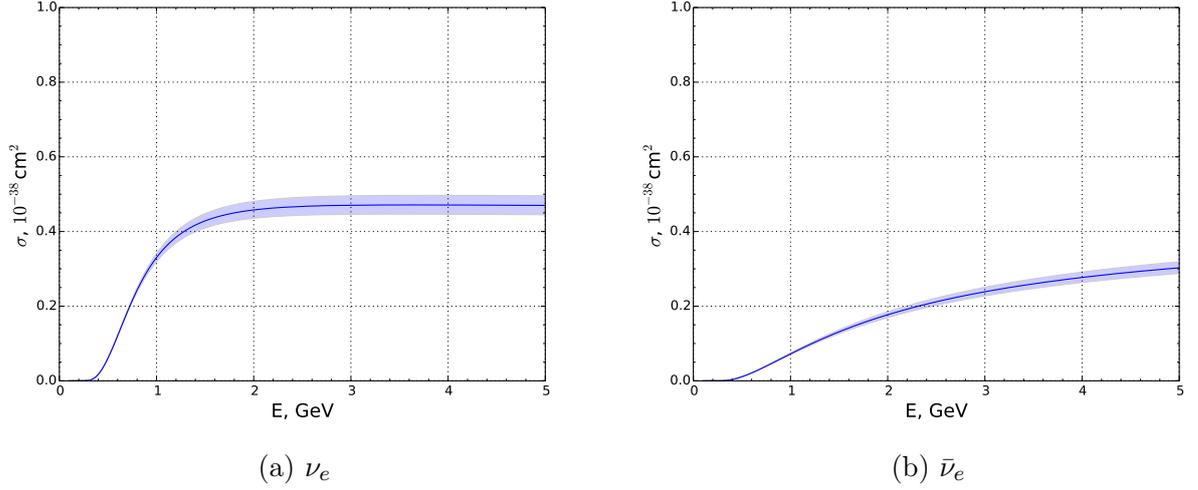


Рис. 5.6: Полное сечение резонансного взаимодействия на нуклон детектора NOVA,  $M_A^{RES} = 1,120 \pm 0,030$  ГэВ

### 5.2.3 Глубоконеупругое взаимодействие

При глубоконеупругом рассеянии нейтрино взаимодействует с отдельными составляющими нуклон кварками, образуя в результате лептон и адронную систему:

$$\begin{aligned} \nu_\mu + N &\rightarrow \mu^- + X, & \bar{\nu}_\mu + N &\rightarrow \mu^+ + X, \\ \nu_\mu + N &\rightarrow \nu_\mu + X, & \bar{\nu}_\mu + N &\rightarrow \bar{\nu}_\mu + X, \end{aligned}$$

Введением Бьёркеновских переменных:

$$\begin{aligned} x &= \frac{Q^2}{2M\nu} = \frac{Q^2}{2ME_\nu y}, \\ y &= \frac{E_{had}}{E_\nu}, \\ Q^2 &= -m_\mu^2 + 2E_\nu(E_l - p_l \cos \theta_l), \end{aligned}$$

где  $E_\nu$  – энергия налетающего нейтрино,  $M$  – масса нуклона,  $\nu = E_{had}$  – энергия конечной адронной системы, а  $E_l$ ,  $p_l$  и  $\theta_l$  – энергия, импульс и угол рассеяния лептона в лабораторной системе, дифференциальное сечение данного инклюзивного процесса можно записать как:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{G_F^2 M E_\nu}{\pi \left(1 + \frac{Q^2}{M_{W,Z}^2}\right)^2} \left[ \frac{y^2}{2} 2xF_1(x, Q^2) + \left(1 - y - \frac{Mxy}{2E}\right) F_2(x, Q^2) \pm y \left(1 - \frac{y}{2}\right) xF_3(x, Q^2) \right],$$

где  $G_F$  – константа Ферми,  $M_{W,Z}$  – масса  $W^\pm$  бозона для сечения реакции с заряженным током и  $Z^0$  бозона для нейтрального тока, а знак  $+$ ,  $-$  отвечают рассеянию нейтрино и антинейтрино соответственно. Функции  $F_i(x, Q^2)$  – безразмерные структурные функции, описывающие внутреннее строение мишени.

Для отделения событий глубоконеупругого рассеяния от квазиупругого и резонансного взаимодействий вводится кинематическое обрезание массы конечной адронной системы  $W_{cut}$ . Было использовано значение  $W_{cut} = 1.431 \pm 0,013$  ГэВ, график зависимости сечения резонансного взаимодействия  $\nu_e$  и  $\bar{\nu}_e$  изображён на рис. 5.7.

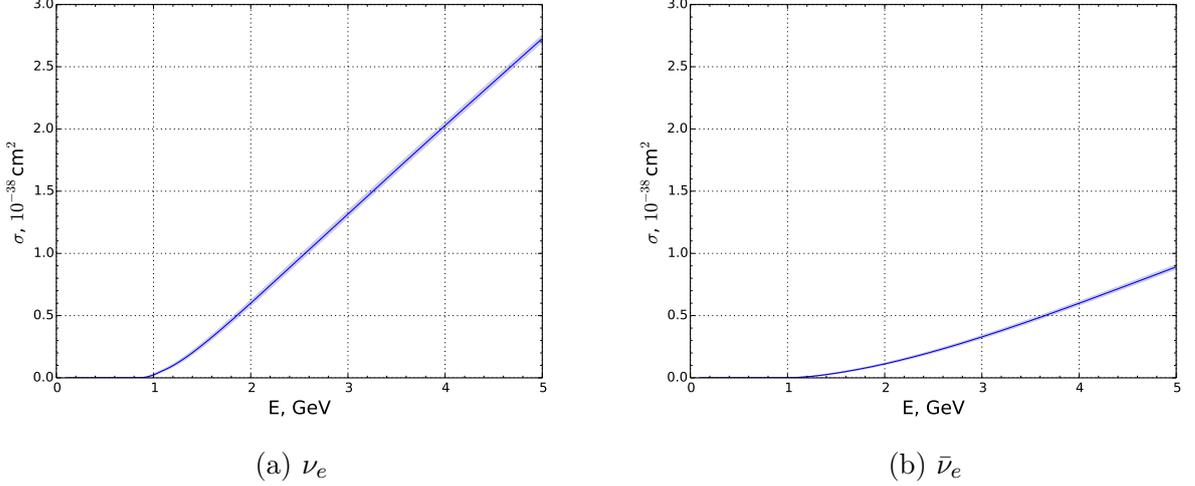


Рис. 5.7: Полное сечение глубоконеупругого взаимодействия на нуклон детектора NOVA,  $W_{cut} = 1.431 \pm 0,013$  ГэВ

### 5.3 Вероятность осцилляций в вакууме и веществе

В стандартной параметризации матрицы лептонного смешивания вероятность перехода мюонного нейтрино в электронное в вакууме имеет вид:

$$\begin{aligned}
P_{\mu e}(E_\nu, L) = & c_{13}^2(\sin^2 2\theta_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2 s_{13}^2) + \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \cos 2\theta_{12} s_{13} 4 \cos \delta) \sin^2 \Delta_{21} + \\
& + (\sin^2 2\theta_{13} s_{23}^2 c_{12}^2 + \frac{1}{2} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} s_{13} \cos \delta) \sin^2 \Delta_{31} + \\
& + (\sin^2 2\theta_{13} s_{23}^2 s_{12}^2 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} s_{13} \cos \delta) \sin^2 \Delta_{32} - \\
& - \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} c_{13} \sin \delta \sin \Delta_{21} \sin \Delta_{31} \sin \Delta_{32}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

где  $L$  - расстояние между источником и детектором,  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ ,  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$  - углы смешивания,  $\Delta_{ij} = \frac{|\Delta m_{ij}^2| L}{4E_\nu}$  - фазы осцилляций. Соответствующая вероятность  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$  осцилляций антинейтрино получается из формулы (5.8) изменением знака CP-нарушающей фазы  $\delta$ . Для вычисления спектров были использованы точные формулы трёхнейтринных осцилляций в веществе из работы [30] с постоянной электронной плотностью  $\rho = 2,7 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ .

## 5.4 Ожидаемые числа событий

В работе использовался диапазон энергии от 1 ГэВ до 4 ГэВ, содержащий основное число ожидаемых  $\nu_e$  и  $\bar{\nu}_e$  событий. Диапазон был разбит на 15 энергетических бинов ( $\Delta E = 0,2$  ГэВ), энергетическое разрешение детектора не учитывалось. Энергетические спектры ожидаемых событий в дальнем детекторе приведены на рис. 5.8.

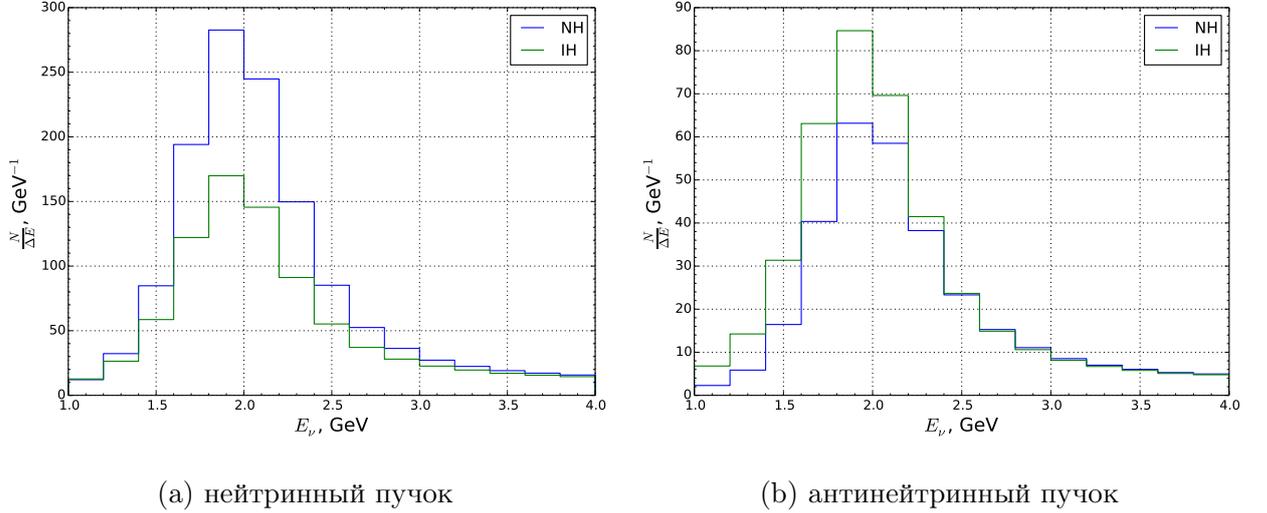


Рис. 5.8: Ожидаемые спектры для нормальной (NH) и обратной (IH) иерархий при фиксированной разности масс  $\Delta m_{32}^2 = 2,59 \cdot 10^{-3}$  эВ<sup>2</sup> и  $\delta = 0$

## 5.5 Учетные неопределённости

При анализе эксперимента учтено влияние следующих систематических неопределённостей:

- ошибки на значения углов смешивания:  $\delta \sin^2 \theta_{12} = 0,017$ ,  $\delta \sin^2 \theta_{13} = 0,0025$ ,  $\delta \sin^2 \theta_{23} = 0,08$  и солнечной разности масс  $\delta \Delta m_{21}^2 = 0,24 \cdot 10^{-5}$  эВ<sup>2</sup>;
- ошибка на атмосферную разность масс  $\delta \Delta m_{atm}^2 = 0,1 \cdot 10^{-3}$  эВ<sup>2</sup>;
- ошибки на указанные выше параметры теоретических моделей сечений.

Все неопределённости были учтены при помощи метода штрафных членов, без введения ковариационной матрицы.

# Глава 6

## Результаты анализа чувствительности эксперимента JUNO

### 6.1 Неоднозначность в определении иерархии масс методом функции правдоподобия

Из трёх параметров  $\Delta m_{21}^2$ ,  $|\Delta m_{31}^2|$  и  $|\Delta m_{32}^2|$  входящих в формулу вероятности выживания (4.8) лишь два являются полностью независимыми: при заданных двух массовых параметрах и гипотезе об иерархии массивных состояний третий массовый параметр определяется однозначно. Обозначим за  $\alpha$  дискретный параметр, обозначающий иерархию и принимающий значения 1 или  $-1$  при нормальной и обратной иерархии соответственно. Тогда, выбрав в качестве независимых  $\Delta m_{21}^2$  и  $|\Delta m_{32}^2|$  связь с  $|\Delta m_{31}^2|$  запишется как:

$$|\Delta m_{31}^2|(\alpha) = |\Delta m_{32}^2| + \alpha \Delta m_{21}^2. \quad (6.1)$$

Чувствительность эксперимента к наблюдению иерархии будет определяться в первую очередь разностью вероятностей в предположении нормальной и обратной иерархии, при данной связи для фиксированных в обоих возможных иерархиях  $\Delta m_{21}^2$  и  $|\Delta m_{32}^2|$  равной:

$$\begin{aligned} P_{ee}^{NH}(E_\nu, L) - P_{ee}^{IH}(E_\nu, L) &= P_{ee}(E_\nu, L; \Delta m_{31}^2(\alpha = 1)) - P_{ee}(E_\nu, L; \Delta m_{31}^2(\alpha = -1)) = \\ &= -4c_{13}^2 s_{13}^2 c_{12}^2 \sin 2\Delta_{31} \sin 2\Delta_{21}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

график которой в зависимости от расстояния  $L$  при энергии нейтрино 4 МэВ приведён на рис. 6.1.

Однако выбор параметризации связи массовых параметров и иерархии не однозначен. На сегодняшний день ни один эксперимент не обладает достаточной точностью для измерения конкретно  $|\Delta m_{32}^2|$ , измеряя некоторую усреднённую по иерархиям атмосферную разность масс  $\Delta m_A^2$ , которую в пределах ошибки можно равноправно интерпретировать как  $|\Delta m_{32}^2|$ ,  $|\Delta m_{31}^2|$  или некоторую их комбинацию. Однако выражение

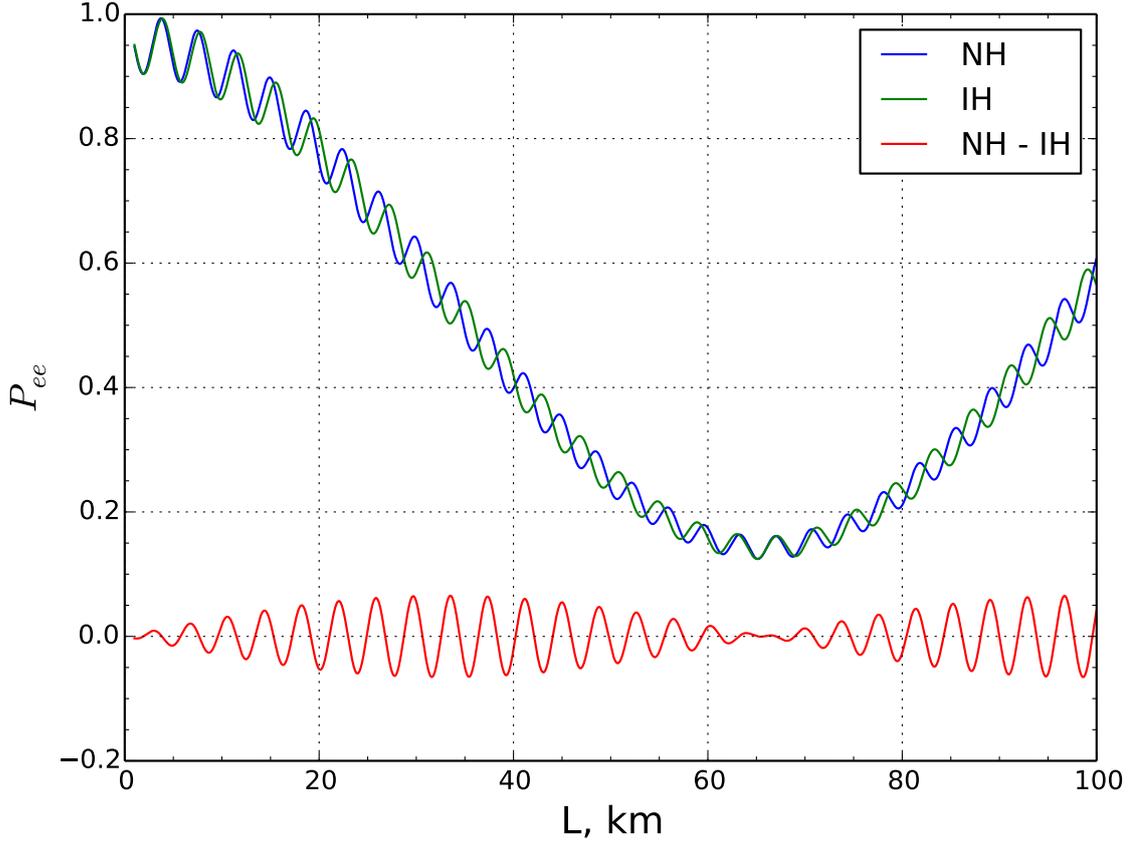


Рис. 6.1: Вероятности выживания в гипотезе нормальной (NH), обратной (IH) и их разности при фиксированном  $\Delta m_{23}^2 = 2,59 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$

для разности вероятностей аналогичное (6.2) существенно зависит от выбора параметризации, в частности при независимых  $|\Delta m_{21}^2|$  и  $\Delta m_0^2 \equiv \frac{1}{2}|\Delta m_{32}^2 + \Delta m_{31}^2|$  [15]:

$$P_{ee}^{NH}(E_\nu, L) - P_{ee}^{IH}(E_\nu, L) = 4c_{13}^2 s_{13}^2 (s_{12}^2 - c_{12}^2) \sin 2\Delta_0 \sin \Delta_{21},$$

зависимость от параметра  $\Delta m_{21}^2$  имеет вид  $\sin \Delta_{21}$  в отличие от  $\sin 2\Delta_{21}$  в (6.2). Таким образом пара функций вероятностей осцилляций  $P_{ee}^{NH}$  и  $P_{ee}^{IH}$  определённых для двух фиксированных масс не является достаточной для оценки, какая из двух возможных иерархий лучше описывает наблюдение, в том числе для предварительной оценки чувствительности, и в общем случае необходимо рассматривать параметры соответствующие бóльшим разностям масс **независимо в каждой иерархии**, то есть:

$$\begin{aligned} \Delta m_{31}^2(\alpha = 1) &\equiv \Delta m_{31,NH}^2, \quad \Delta m_{32}^2(\alpha = 1) \equiv \Delta m_{32,NH}^2, \quad |\Delta m_{31,NH}^2| - |\Delta m_{32,NH}^2| = \Delta m_{21}^2 \\ \Delta m_{31}^2(\alpha = -1) &\equiv \Delta m_{31,IH}^2, \quad \Delta m_{32}^2(\alpha = -1) \equiv \Delta m_{32,IH}^2, \quad |\Delta m_{32,IH}^2| - |\Delta m_{31,IH}^2| = \Delta m_{21}^2 \end{aligned}$$

Для приближенной оценки чувствительности методом функции правдоподобия зависимость  $\Delta m_{32}^2(\alpha)$  и  $\Delta m_{31}^2(\alpha)$  от иерархии должна обеспечивать минимальную разницу  $P_{ee}^{NH}(E_\nu, L)$  и  $P_{ee}^{IH}(E_\nu, L)$ . В линейном приближении по малой разности масс

$\Delta m_{21}^2$  [31]:

$$|\Delta m_{31}^2(\alpha)| = \Delta m_\eta^2 + \alpha \eta \Delta m_{21}^2, \quad |\Delta m_{32}^2(\alpha)| = \Delta m_\eta^2 + \alpha(\eta - 1)\Delta m_{21}^2, \quad (6.3)$$

где  $\Delta m_\eta^2$  - эффективная атмосферная разность масс, а  $\eta$  - параметр, определяемый из условия минимальности:

$$|P_{ee}^{NH}(E_\nu, L) - P_{ee}^{IH}(E_\nu, L)| = |-4c_{13}^2 s_{13}^2 [c_{12}^2 \sin 2\eta \Delta_{21} + s_{12}^2 \sin 2(\eta - 1)\Delta_{21}] \sin 2\Delta_\eta|.$$

При  $\Delta_{21} \ll 1$  выражение в квадратных скобках обращается в ноль при  $\eta \approx s_{12}^2$ , откуда  $\Delta m_\eta^2$  определяется в обеих иерархиях как:

$$\Delta m_\eta^2 = c_{12}^2 |\Delta m_{31}^2| + s_{12}^2 |\Delta m_{32}^2|.$$

Разность вероятностей  $P_{ee}^{NH}(E_\nu, L)$  и  $P_{ee}^{IH}(E_\nu, L)$  при энергии  $E_\nu = 4$ , МэВ в зависимости от расстояния приведена на рис. 6.2. Из графика видно, что линейная связь

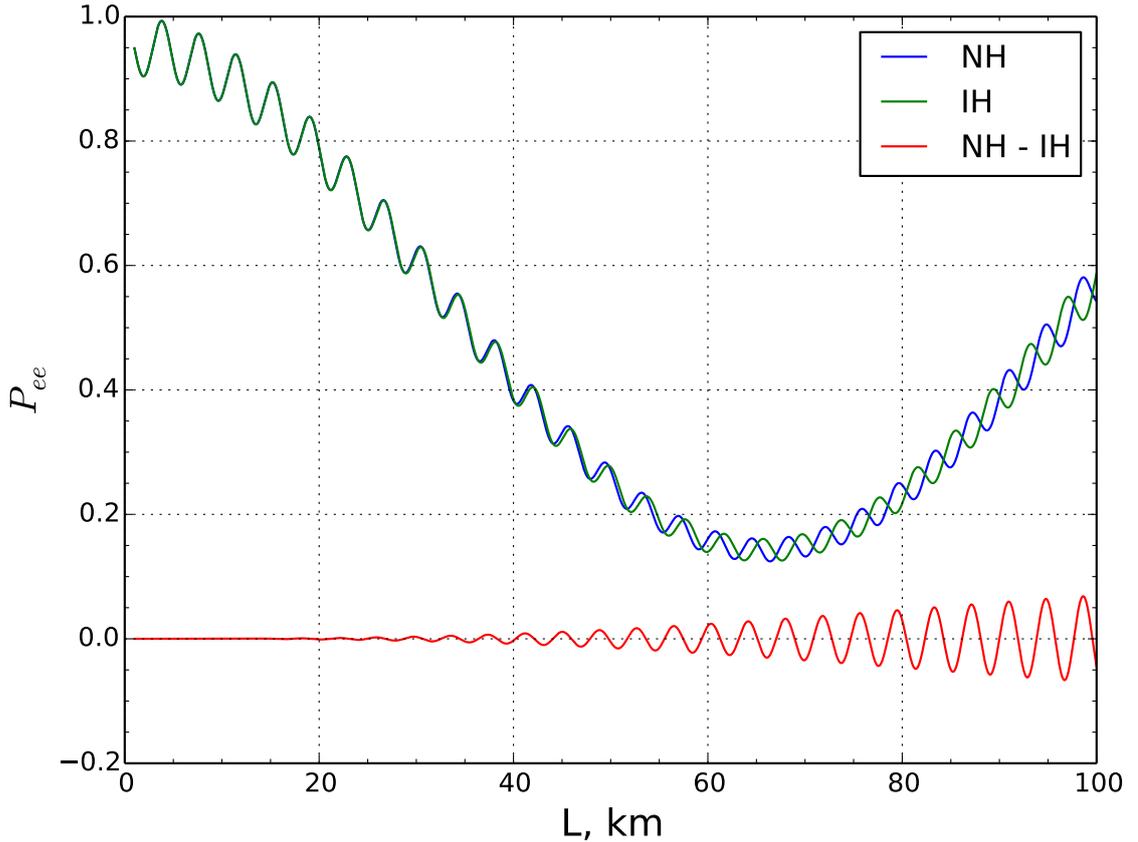


Рис. 6.2: Вероятности выживания в гипотезе нормальной (NH), обратной (IH) иерархий и их разность при фиксированном  $\Delta m_{ee}^2 = 2,59 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$

атмосферной масс в каждой из гипотез через величину  $\Delta m_{ee}^2$  обеспечивает совпадение вероятностей  $P_{ee}^{NH}(E_\nu, L)$  и  $P_{ee}^{IH}(E_\nu, L)$  на расстояниях приблизительно  $L \lesssim 40$  км, что

недостаточно для анализа на расстояниях запланированных в проекте эксперимента  $L \sim 52$  км или больших. Тем не менее, полученная параметризация (6.3) используется в дальнейшем анализе с независимой эффективной массой  $\Delta m_{ee}^2$  для каждой иерархии.

## 6.2 Определение иерархии масс в эксперименте

В общем случае процедура оценки соответствия наблюдаемого спектра одной из иерархий масс не должна опираться на соотношения вида (6.1) и (6.3) фиксирующие общую для обеих гипотез атмосферную разность масс через которую связаны между собой параметры  $\Delta m_{32,\text{NH}}^2$  и  $\Delta m_{32,\text{IH}}^2$  (или, например,  $\Delta m_{31,\text{NH}}^2$  и  $\Delta m_{31,\text{IH}}^2$ ), сравнение наблюдения с предсказанными спектрами должно осуществляться при значениях параметров наилучшим образом соответствующие наблюдению и подобранных в каждой гипотезе **независимо**.

Общая схема оценки чувствительности, использованная для анализа эксперимента JUNO, выглядит следующим образом.

1. По заданному на входе набору средних значений оценок осцилляционных параметров  $(\bar{s}_{13}^2, \bar{s}_{12}^2, \overline{\Delta m_{21}^2}, \overline{\Delta m_{ee}^2})$  рассчитывается теоретические предсказания  $\boldsymbol{\mu}_{\text{NH}}$  в гипотезе нормальной и  $\boldsymbol{\mu}_{\text{IH}}$  в гипотезе обратной иерархий масс в виде гистограммы значений распределения ожидаемых значений по энергии.
2. Для каждой гипотезы  $\alpha \in \{\text{NH}, \text{IH}\}$  вычисляется ковариационная матрица  $\mathbf{V}_\alpha$ , включающая заданные систематические неопределённости в осцилляционных (кроме массы  $\Delta m_{ee}^2$ ) и нормировочных параметрах и статистические неопределённости каждого бина гистограммы наблюдения в гауссовом приближении.
3. По каждому предсказанию генерируется выборка из  $K$  возможных наблюдений  $(\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \dots, \mathbf{n}^{(K)})_\alpha$  распределённых по многомерному нормальному распределению в соответствии с соответствующей ковариационной матрицей.
4. Для каждого наблюдения  $\mathbf{n}$  определяется пара параметров  $\hat{\Delta m}_{ee,\text{NH}}^2$  и  $\hat{\Delta m}_{ee,\text{IH}}^2$ , дающих наилучшее соответствие теоретического предсказания данному наблюдению в нормальной и обратной иерархиях соответственно, путём минимизации функции  $\chi_{\mathbf{n}}^2(\boldsymbol{\mu}_\alpha; \alpha)$ :

$$\begin{aligned} \Delta \hat{m}_{ee,\alpha}^2(\mathbf{n}) &= \arg \min_{\Delta m_{ee}^2} \chi_{\mathbf{n}}^2(\boldsymbol{\mu}_\alpha(\Delta m_{ee}^2); \alpha) = \\ &= \arg \min_{\Delta m_{ee}^2} \left[ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}_\alpha(\Delta m_{ee}^2))^T \mathbf{V}_\alpha^{-1} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}_\alpha(\Delta m_{ee}^2)) + \left( \frac{\Delta m_{ee}^2 - \overline{\Delta m_{ee}^2}}{\delta m_{ee}^2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (6.4)$$

5. На основе обеих выборок для каждой гипотезы об иерархии  $\alpha$  строится эмпирическая плотность  $\frac{dp_\alpha}{d\Delta\chi^2}(\Delta\chi^2)$  распределение статистики:

$$\Delta\chi^2(\mathbf{n}; \alpha) = \chi_{\mathbf{n}}^2(\boldsymbol{\mu}_{\text{NH}}(\Delta\hat{m}_{ee,\text{NH}}^2(\mathbf{n})); \text{NH}) - \chi_{\mathbf{n}}^2(\boldsymbol{\mu}_{\text{IH}}(\Delta\hat{m}_{ee,\text{IH}}^2(\mathbf{n})); \text{IH}),$$

описывающей отношение правдоподобия гипотез нормальной и обратной иерархии при значениях атмосферной массы  $\delta m_{ee}^2$ , дающей наиболее близкое сходство с наблюдением.

6. Фиксируется критерий разделения гипотез, в данном случае граничное значение  $\Delta\chi_{\text{cut}}^2$ , сравнение с которым величины  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}_{\text{exp}})$ , где  $\mathbf{n}_{\text{exp}}$  – экспериментальное наблюдение, позволит сделать вывод о реализованной в природе иерархии, при  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}_{\text{exp}}) < \Delta\chi_{\text{cut}}^2$  принимается гипотеза нормальной иерархии масс, при  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}_{\text{exp}}) > \Delta\chi_{\text{cut}}^2$  – противоположная ей гипотеза обратной иерархии.
7. Исходя из полученных эмпирических распределений  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}; \alpha)$  для обеих гипотез  $\alpha$  оценивается относительная частота  $p_\alpha^{\text{sens}}$  наблюдений из выборки данной гипотезы со значением  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}; \alpha)$ , удовлетворяющей соответствующему данной иерархии критерию  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}, \alpha) \geq \Delta\chi_{\text{cut}}^2$ :

$$p_{\text{NH}}^t = \int_{-\infty}^{\Delta\chi_{\text{cut}}^2} \frac{dp_{\text{NH}}}{d\Delta\chi^2} d\Delta\chi^2, \quad p_{\text{IH}}^t = \int_{\Delta\chi_{\text{cut}}^2}^{+\infty} \frac{dp_{\text{IH}}}{d\Delta\chi^2} d\Delta\chi^2, \quad (6.5)$$

а частота  $p_\alpha^f$  наблюдений из выборки противоположной гипотезы  $-\alpha$  со значением  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}; -\alpha)$ , удовлетворяющим тому же самому критерию  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}; -\alpha) \geq \Delta\chi_{\text{cut}}^2$ :

$$p_{\text{NH}}^f = \int_{-\infty}^{\Delta\chi_{\text{cut}}^2} \frac{dp_{\text{IH}}}{d\Delta\chi^2} d\Delta\chi^2, \quad p_{\text{IH}}^f = \int_{\Delta\chi_{\text{cut}}^2}^{+\infty} \frac{dp_{\text{NH}}}{d\Delta\chi^2} d\Delta\chi^2. \quad (6.6)$$

8. Получены значения  $p_\alpha^t$  интерпретируется как *чувствительность* эксперимента к обнаружению иерархии  $\alpha$ , а значения  $p_\alpha^f$  – как *статистическую значимость* наблюдения из экспериментальных данных иерархии  $\alpha$ . Данные характеристики выраженные в числе стандартных отклонений двухстороннего нормального распределения  $N(0, 1)$  по формулам:

$$(N_\sigma^{\text{sens}})_\alpha = \sqrt{2}\text{erf}^{-1}(p_\alpha^t), \quad (N_\sigma^{\text{sgnf}})_\alpha = \sqrt{2}\text{erf}^{-1}(1 - p_\alpha^f),$$

будем также называть чувствительностью и статистической значимостью соответственно.

## 6.2.1 Статистическая значимость определения иерархии масс

Эмпирическое распределение функций  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}; \alpha)$  для обеих гипотез, полученное из выборок с заданной разностью масс  $\Delta m_{ee}^2 = 2,59 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$  при проектных параметрах эксперимента приведены на рис. (6.3а). Выбор значения  $\Delta\chi_{\text{cut}}^2$ , определяющий чувствительность и статистическую значимость неоднозначен. Исходя из симметрии полученных распределений в качестве  $\Delta\chi_{\text{cut}}^2$  был выбран из условия равенства

$$p_{\text{NH}}^t = p_{\text{IH}}^t \equiv p^t,$$

то есть равной чувствительности эксперимента к обоим гипотезам. Из (6.5) и (6.6) очевидно, что условие эквивалентно:

$$p_{\text{NH}}^f = p_{\text{IH}}^f \equiv p^f,$$

а значит выраженные в единицах  $\sigma$  чувствительности и статистические значимости обеих гипотез равны:

$$(N_{\sigma}^{\text{sens}})_{\text{NH}} = (N_{\sigma}^{\text{sens}})_{\text{IH}} = (N_{\sigma}^{\text{sgnf}})_{\text{NH}} = (N_{\sigma}^{\text{sgnf}})_{\text{IH}}.$$

В дальнейшем в данном разделе значение всех этих равных величин будет обозначаться как  $N_{\sigma}$ .

Для изображённых на рис. (6.3а) распределений такому условию отвечает выбор граничного значения  $\Delta\chi_{\text{cut}}^2 \approx 0$ : площадь под кривой плотности распределения  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}; \text{NH})$  при  $\Delta\chi^2 > \Delta\chi_{\text{cut}}^2$  (то есть  $p_{\text{IH}}^f$ ), обозначенная синим цветом, равна площади кривой плотности  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}; \text{IH})$  при  $\Delta\chi^2 < \Delta\chi_{\text{cut}}^2$  (то есть  $p_{\text{NH}}^f$ ) и равна:

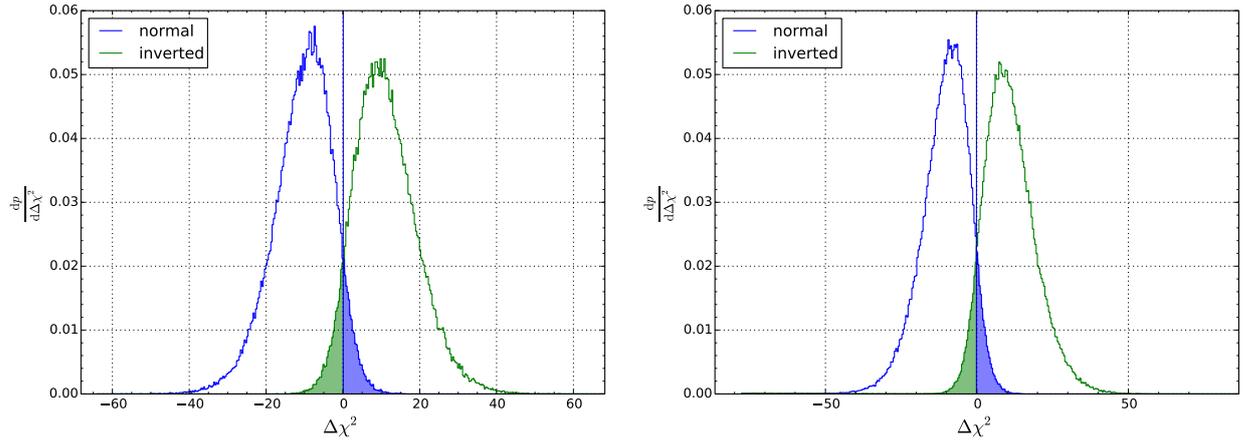
$$p_{\text{NH}}^f = p_{\text{IH}}^f \approx 0,06,$$

что согласно обеспечивает разделение иерархий с чувствительностью и значимостью  $N_{\sigma} \approx 1,87$ . Пороговое значение  $\Delta\chi_{\text{cut}}^2$  практически не зависит от заданного при выборке значения разности масс  $\Delta m_{ee}^2$  в пределах известной на сегодняшний день её неопределённости. Усреднённое по  $\Delta m_{ee}^2$  с гауссовым весом шириной  $\delta\Delta m_{ee}^2 = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$  и средним  $\delta\Delta m_{ee}^2 = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$  распределение  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}; \alpha)$ , приведённое на рис. 6.3б, указывает на возможность разделения гипотез с  $p^f \approx 0,073$  или со значимостью  $N_{\sigma} \approx 1,79$ .

## 6.2.2 Поиск оптимального расстояния

Для оценки оптимального расстояния размещение детектора указанная выше процедура была выполнена при различных удалённостях от реакторных комплексов Yangjiang и Taishan. Расстояние до каждого реактора в комплексе бралось равным

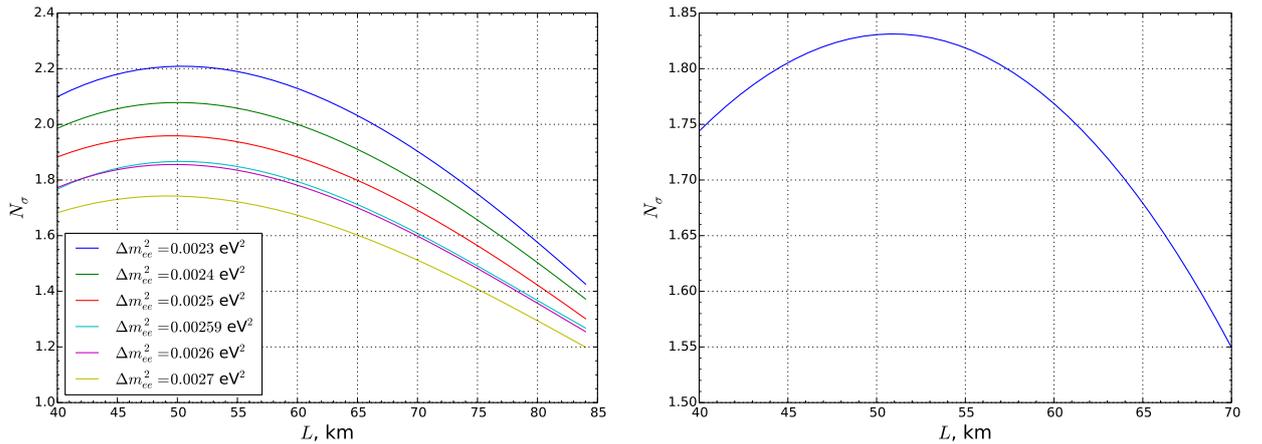
$$L_{\text{core}} = L_{\text{core}}^{(0)} + L - L^{(0)},$$



(a) выборка с  $\Delta m_{ee}^2 = 2,59 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$ . (b) усреднение по  $\Delta m_{ee}^2 = (2,59 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$ .

Рис. 6.3: Эмпирическая плотность распределения величин  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}; \text{NH})$  и  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}; \text{IH})$

где  $L$  - варьируемое расстояние,  $L_{core}^{(0)}$  - расстояние до реактора из таб. 4.1,  $L^0 = 52 \text{ км}$  - номинальное расстояние до каждого из комплексов, пренебрегая тем самым поправками на точное геометрическое расположение реакторов внутри комплекса. Считая  $L$  одинаковым для обоих реакторных комплексов получаем следующую зависимость чувствительности эксперимента к определению иерархии масс при заданных значениях разности масс  $\Delta m_{ee}^2$  на рис. 6.4а. Учёт неопределённости  $\Delta m_{ee}^2$  путём усреднения выборки по гауссовому распределению с шириной  $\delta\Delta m_{ee}^2 = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$  вокруг центрального значения  $\overline{\Delta m_{ee}^2} = 2,59 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$  не приводит к существенным изменениям характера зависимости  $N_\sigma$  от расстояния (рис. 6.4б):



(a) значения  $\Delta m_{ee}^2$  фиксированы в выборке (b) усреднение по  $\Delta m_{ee}^2 = (2,59 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$

Рис. 6.4: Чувствительность в зависимости от расстояния, масса детектора 20 кт.

Увеличение массы детектора не изменяет оптимального расположения детектора, увеличивая чувствительность за счет большей статистики событий (рис. 6.5).

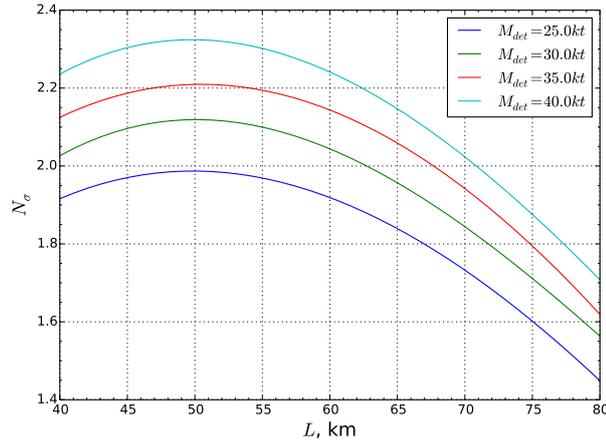


Рис. 6.5: Чувствительность при  $\Delta m_{ee}^2 = 2.59 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$  для различных масс детектора.

Таким образом проектное расположение детектора с расстояниями до реакторов из таб. 4.1 является оправданным при симметричном его удалении от реакторных комплексов и при фиксированном значении  $\Delta m_{ee}^2 = 2,59 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$ , позволяя разделить гипотезы об иерархии со значимостью  $N_{\sigma}^{max} \approx 1,87$ . При асимметричном расположении с фиксированным расстоянием до комплекса Yangjiang  $L_{YJ} = 52 \text{ км}$  и изменяемым расстоянием до комплекса Taishan  $L_{TS} = L_{YJ} + \Delta L$  зависимость от  $\Delta L$  имеет вид, представленный на рис. 6.6, из которого следует, что ожидаемая чувствительность максимальна при  $\Delta L = 0$ , то есть равной удалённости обоих реакторных комплексов от детектора.

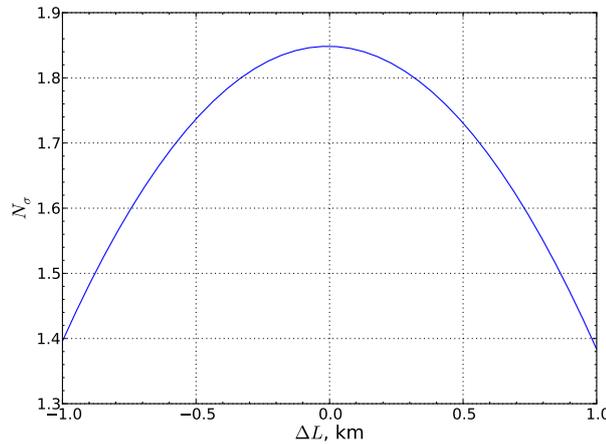
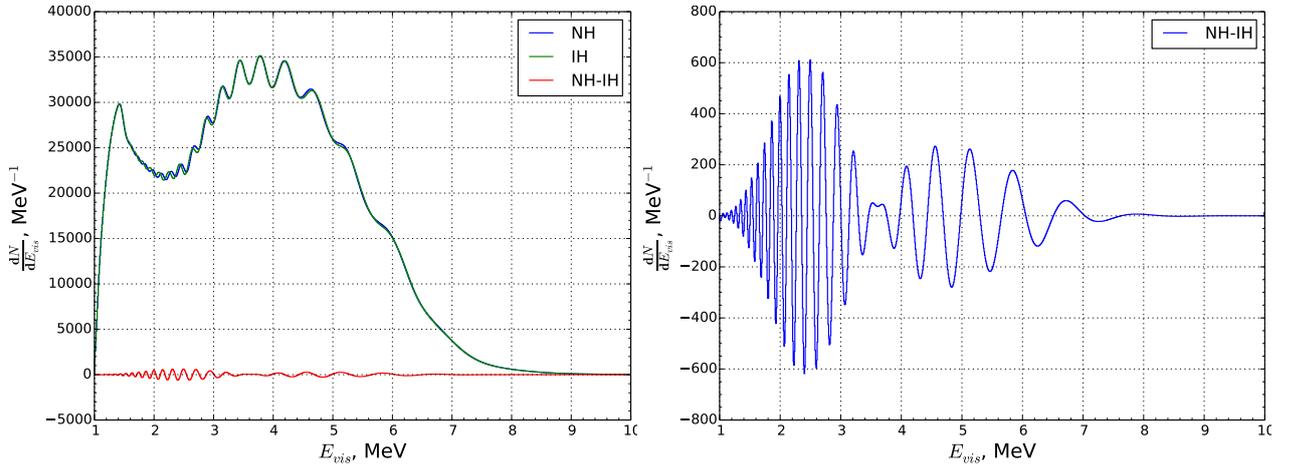


Рис. 6.6: Чувствительность в зависимости от относительно расстояния  $\Delta L$  между комплексами,  $L_{YJ} = 52 \text{ км}$ ,  $L_{TS} = L_{YJ} + \Delta L$ , масса детектора 20 кт

Ожидаемый эффект в различие числа событий для разных гипотезах об иерархии при указанном оптимальном расстоянии представлен на рис. 6.7.



(a) спектры в гипотезах нормальной (NH) и об- (b) разность ожидаемого числа событий между  
ратной (IH) иерархии нормальной и обратной иерархиях

Рис. 6.7: Ожидаемые спектры при  $\Delta m_{ee, \text{NH}}^2 = 2,59 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$  и  $\Delta m_{ee, \text{IH}}^2 = 2,6074 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$ , дающие наилучшее сходство двух гипотез при данной  $\Delta m_{ee, \text{NH}}^2$ .

### 6.2.3 Зависимость от параметров

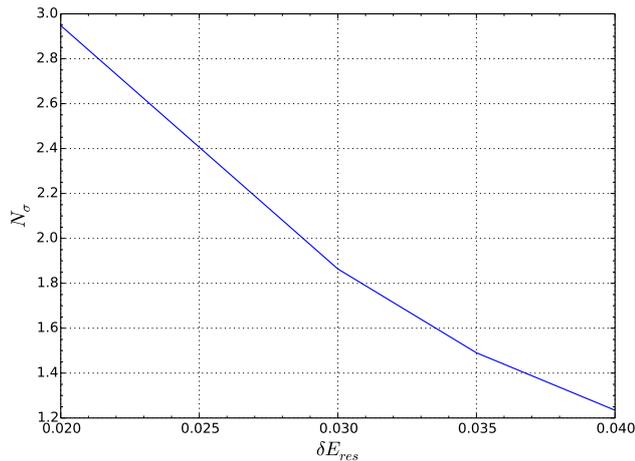


Рис. 6.8: Зависимость чувствительности от энергетического разрешения детектора

Из расчетных спектров, учитывающих разрешения детектора (рис. 4.5) видно, что возможность разделения гипотез по результатам эксперимента крайне требовательна к точности реконструкции энергии вылетающего лептона, в частности при разрешении 5% при энергии 1 МэВ различные гипотезы об иерархии приводят к практически неразличимым предсказаниям (рис 4.5b). Количественная оценка зависимости к разрешению представлена на рис. 6.8. Проектное разрешение  $\delta E_{res} = 3, \%$  является критически существенным требованием к эксперименту, снижения которого на 1% до  $\delta E_{res} = 4 \%$  снижает статистическую значимость до  $N_\sigma \approx 1,2$ , что соответствует вероятности неправильного определения иерархии  $\approx 20 \%$ . Очевидно, что достигнутое же на сегодняшний день разрешение  $\delta E_{res} = 7,5 \%$  не позволит сделать никаких заключений о

справедливости одной из гипотез.

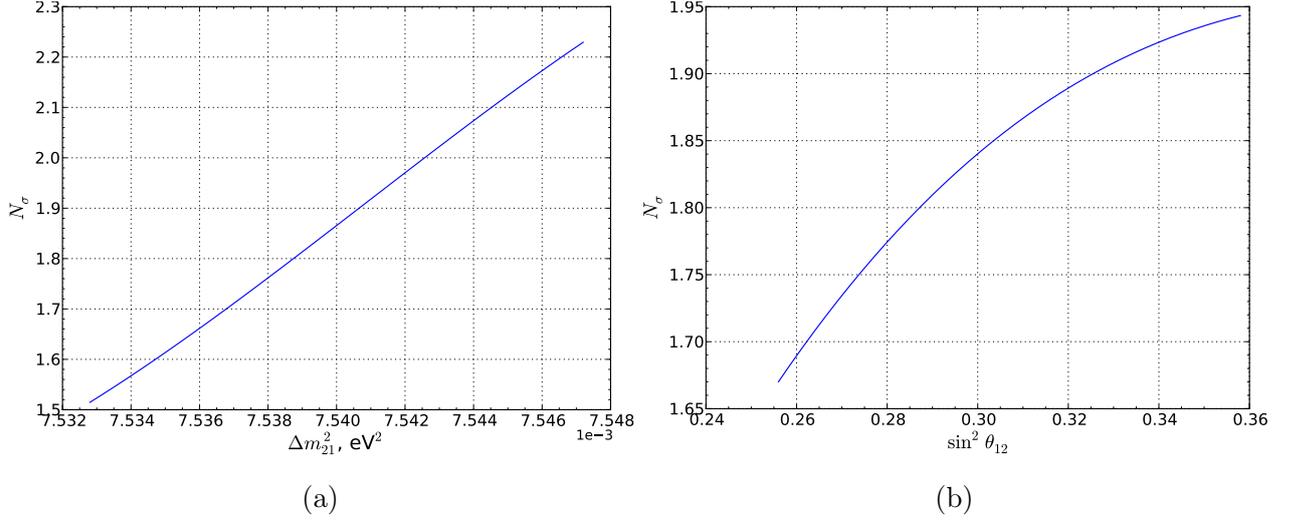


Рис. 6.9: Зависимость чувствительности от осцилляционных параметров: солнечной разности масс  $\Delta m_{21}^2$  и угла смешивания  $\sin^2 \theta_{12}$ .

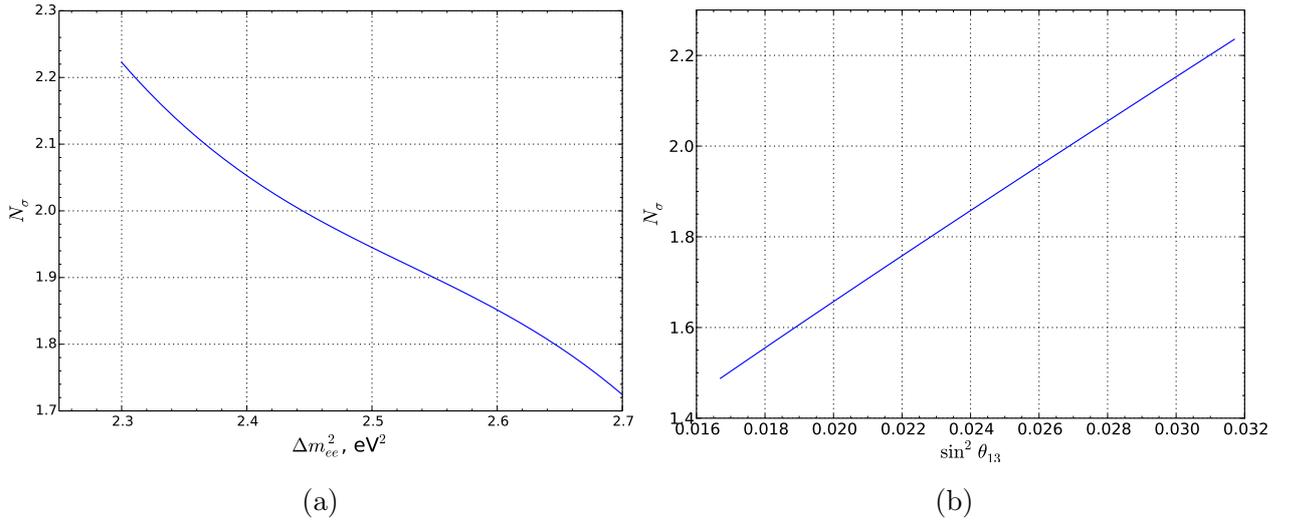


Рис. 6.10: Зависимость чувствительности от осцилляционных параметров: атмосферной разности масс  $\Delta m_{ee}^2$  и угла смешивания  $\sin^2 \theta_{13}$ .

В зависимости от конкретных значений осцилляционных параметров  $\Delta m_{21}^2$ ,  $\sin^2 \theta_{12}$ ,  $\Delta m_{ee}^2$  и  $\sin^2 \theta_{13}$  эффект от различия иерархий имеет разную величину, приводя к разным оценкам чувствительности (рис. 6.10, рис. 6.9). Усреднение по неопределённости солнечной разности масс  $\Delta m_{21}^2$  и углов смешивания  $\sin^2 \theta_{12}$  и  $\sin^2 \theta_{13}$  с симметричным гауссовым весом приводит к оценке в соответствующем центральном значении параметра, эффективно устраняя зависимость от их априорной неопределённости. Для атмосферной разности масс  $\Delta m_{ee}^2$ , определяющей, как и гипотеза об иерархии, фазу быстрых осцилляций, априорная неопределённость играет существенную роль ограничивая

интерпретацию наблюдаемой фазы в одной иерархии как реализацию противоположной иерархии с другим, в пределах неопределённости, значением атмосферной массы. Зависимость ожидаемой чувствительности от априорной точности  $\Delta m_{ee}^2$  представлена на рис. 6.11а. На данный момент наилучшая оценка величины  $\Delta m_{ee}^2$  произведения экспериментом Daya Bay, составляет  $\Delta m_{ee}^2 = (2,59 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$ , планируемое улучшение точности к началу набора данных эксперимента JUNO до  $\delta \Delta m_{ee}^2 = 0,03 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$  позволит незначительно улучшить значимость разделения иерархии до  $N_\sigma \approx 1.9$ .

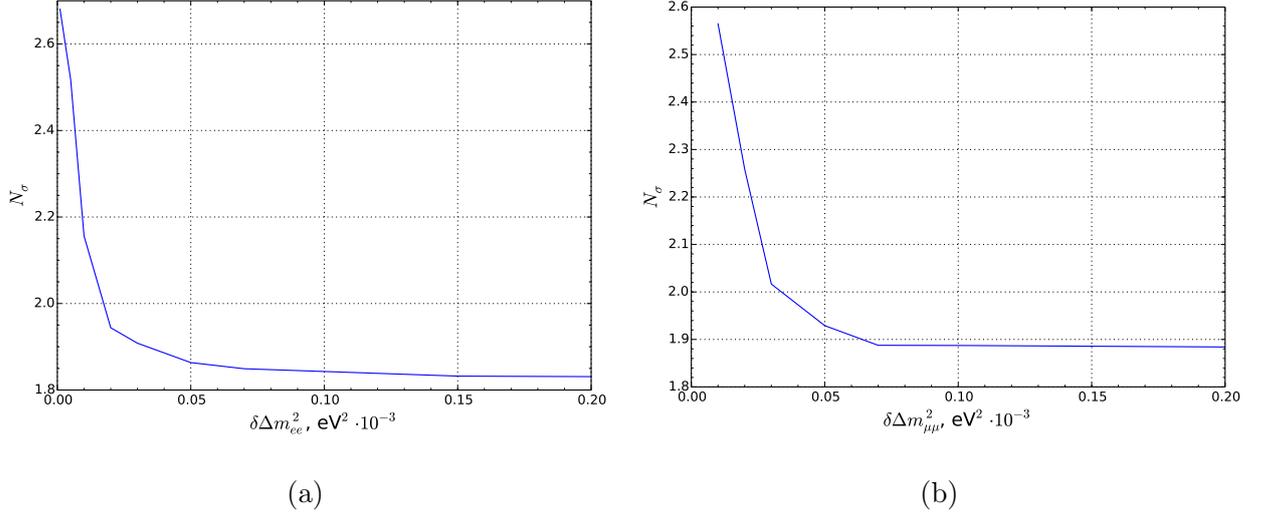


Рис. 6.11: Зависимость чувствительности от априорной точности параметров  $\Delta m_{ee}^2$  и  $\Delta m_{\mu\mu}^2$ .

Учёт ограничения на атмосферную разность масс, полученного из реакторных экспериментов, измеряющих эффективный параметр:

$$\begin{aligned} \Delta m_{\mu\mu}^2 &= \sin^2 \theta_{12} |\Delta m_{31}^2| + \cos^2 \theta_{12} |\Delta m_{31}^2| + \cos \delta \sin \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \text{tg} \theta_{23} \Delta m_{21}^2 \\ &= \Delta m_{ee}^2 + \alpha (\sin^2 \theta_{12} - \cos^2 \theta_{12}) \Delta m_{21}^2 + \cos \delta \sin \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \text{tg} \theta_{23} \Delta m_{21}^2 \end{aligned} \quad (6.7)$$

можно произвести при помощи дополнительного pull-члена в функциях  $\chi_{\mathbf{n}}^2(\boldsymbol{\mu}_\alpha(\Delta m_{ee}^2))$ :

$$\chi_{\mathbf{n}}^2(\alpha, \Delta m_{ee}^2; \overline{\Delta m_{\mu\mu}^2}, \delta \Delta m_{\mu\mu}^2) = \chi_{\mathbf{n}}^2(\boldsymbol{\mu}_\alpha(\Delta m_{ee}^2)) + \left( \frac{\Delta m_{\mu\mu}^2(\alpha, \Delta m_{ee}^2) - \overline{\Delta m_{\mu\mu}^2}}{\delta \Delta m_{\mu\mu}^2} \right)^2.$$

Пренебрегая в (6.7) членом, содержащим неизвестную на данный момент CP-нарушающую фазу  $\delta$ , не превышающим по порядку величины значение  $\lesssim 10^{-5} \text{ эВ}^2 \lesssim 0,01 \Delta m_{\mu\mu}^2$  ограничивая минимальную неопределённость  $\delta \Delta m_{\mu\mu}^2$ , при  $\overline{\Delta m_{\mu\mu}^2} = 2.56 \text{ эВ}^2$ , что соответствует нормальной иерархии при  $\overline{\Delta m_{ee}^2} = 2.59 \text{ эВ}^2$  получаем зависимость чувствительности от точности определения  $\Delta m^2_{\mu\mu}$  на рис. 6.11b.

### 6.3 Сравнение с оценкой методом функции правдоподобия

Несмотря на то, что метод функции правдоподобия при фиксированной в обеих иерархиях массе  $\Delta m_{ee}^2$  является приближением к описанной процедуре с независимыми параметрами  $\Delta m_{ee}^2, \text{NH}$  и  $\Delta m_{ee}^2, \text{IH}$ , он позволяет верно оценить оптимальное расположение детектора, качественно воспроизводя (рис. 6.12) поведение зависимости чувствительности от расстояния полученное выше (рис. 6.4b), давая при этом завышенную оценку чувствительности ( $N_\sigma \approx 2.7$  в оптимуме), что соответствует результату при малой априорной неопределённости  $\delta\Delta m_{ee}^2 \approx 0,001 \text{ эВ}^2$  (рис. 6.11a). При бóльших ошибках, ожидаемых в частности к моменту набора статистики, применение данного приближённого метода для предварительных оценок и анализа реальных данных невозможно.

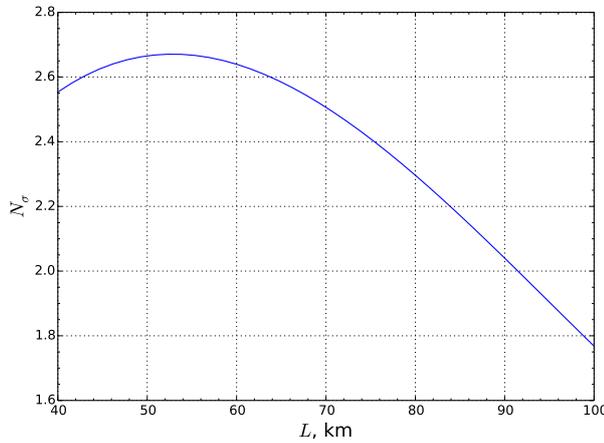


Рис. 6.12: Чувствительность оцененная при фиксированной в обеих иерархиях  $\Delta m_{ee}^2 = (2,59 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$  после усреднения, масса детектора 20 кт

### 6.4 Сравнение с “методом $\sqrt{\Delta\chi^2}$ ”

В работах по оценке возможности разделению гипотез иерархии масс в реакторных экспериментах иногда используется подход к определению чувствительности применяемый для непрерывных параметров [15]. Данный подход основан на интерпретации разности

$$\Delta\chi_{\mathbf{n}}^2(\boldsymbol{\theta}_0) = |\chi_{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_0)}^2(\mathbf{n}) - \chi_{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_0)}^2(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_0))|, \quad (6.8)$$

где  $\boldsymbol{\theta}_0$  - заданный набор параметров, как случайной величины при гауссовых флуктуациях  $\mathbf{n}$  вокруг среднего  $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_0)$  с ковариационной матрицей из функции  $\chi_{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_0)}^2(\mathbf{x})$  распределённой по закону  $\chi_k^2$  для  $k$  независимых степеней свободы вектора  $\mathbf{n}$ . Делая замену

переменных  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi})$ , где  $\boldsymbol{\xi}$  - вектор из  $m$  свободных параметров и интегрируя по  $k - m$  степеням свободы получаем функцию

$$\Delta\chi^2(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\theta}_0) = |\chi_{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_0)}^2(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi})) - \chi_{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_0)}^2(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_0))|, \quad (6.9)$$

распределённую по закону  $\chi_m^2$ . Исходя из свойств данного распределения, по значению  $\Delta\chi^2(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\theta}_0)$ , вычисляется вероятность наблюдения  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi})$  как статистической флуктуации в гипотезе  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ , что после пересчёта на статистическую значимость в количестве стандартных отклонений нормального распределения приводит к стандартной формуле

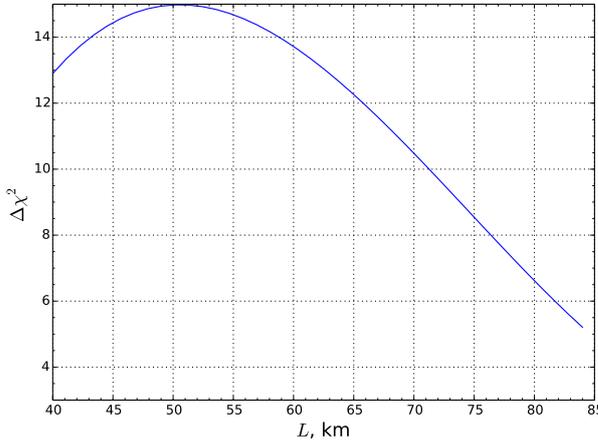
$$N_\sigma = \sqrt{\frac{\Delta\chi^2(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\theta}_0)}{m}},$$

или, при одном свободном параметре  $\xi$ :

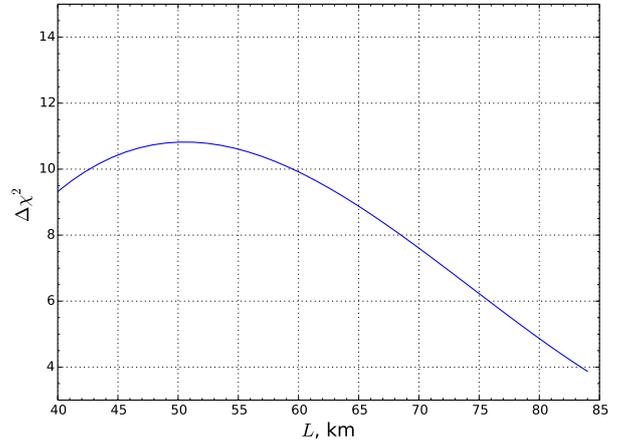
$$N_\sigma = \sqrt{\Delta\chi^2(\xi; \boldsymbol{\theta}_0)}.$$

В случае наличия в векторе  $\boldsymbol{\xi}$  дискретных параметров (таких, как гипотеза об иерархии,  $\alpha \in \{\text{NH}, \text{IH}\}$ ), непрерывная замена переменных в выражении (6.8) невозможна и величина (6.9) в общем случае не распределена по закону  $\chi_k^2$ , а следовательно интерпретация величины  $\Delta\chi^2(\xi; \boldsymbol{\theta}_0)$  как  $N_\sigma(\xi)^2$  (в случае одного непрерывного параметра) неприменима.

Тем не менее, полагая свободными параметрами  $\boldsymbol{\xi} = (\Delta m_{ee}^2, \alpha)$  и фиксируя для определённости гипотезу обратной иерархии:  $\boldsymbol{\theta}_0 = (\overline{\Delta m_{ee}^2}, \text{IH})$  для функции  $\min_{\Delta m_{ee}^2} \Delta\chi^2(\boldsymbol{\xi} = (\Delta m_{ee}^2, \text{NH}), \boldsymbol{\theta}_0)$  в зависимости от расстояния  $L$  получаем зависимость, представленную на рис. 6.13. В сравнении с результатами (рис. 6.4а) данный метод



(a)  $\overline{\Delta m_{ee}^2} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$



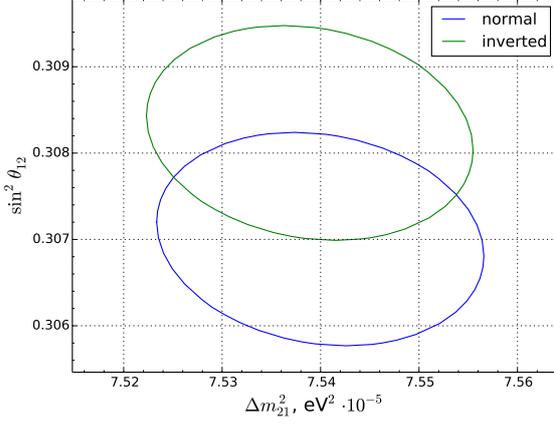
(b)  $\overline{\Delta m_{ee}^2} = 2,59 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$

Рис. 6.13: Оценка  $\Delta\chi^2$  для гипотезы нормальной иерархии.

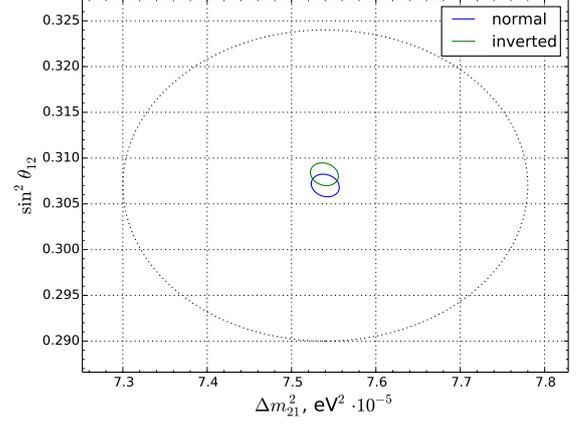
дает схожее поведение по  $L$ , сохраняя оптимальное расположение детектора. Однако интерпретация  $\sqrt{\Delta\chi^2(\xi; \boldsymbol{\theta}_0)}$  как статистическую значимость приводит к завышенным оценкам, в частности при  $\overline{\Delta m_{ee}^2} = 2,59 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$  предсказывая на оптимальном расстоянии  $N_\sigma \approx 3$  по сравнению с  $N_\sigma \approx 1,87$  на рис. 6.4а.

## 6.5 Измерение осцилляционных параметров

Для оценки ожидаемой точности определения непрерывных параметров, таких как солнечная разность масс  $\Delta m_{21}^2$ , и углы смешивания  $\sin^2 \theta_{12}$  и  $\sin^2 \theta_{13}$ , оправдано использование стандартного подхода, кратко описанного в предыдущем разделе. Соответствующие контуры на уровне  $1\sigma$  приведены на рис. 6.14

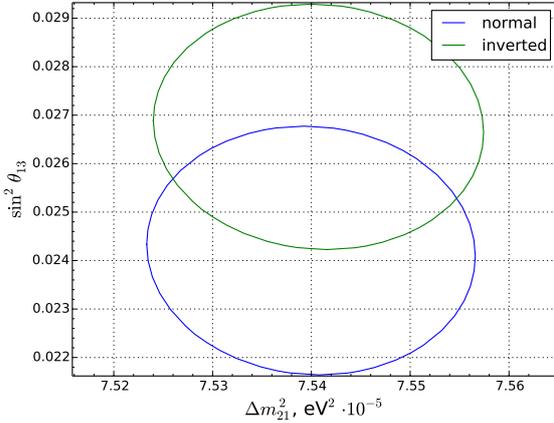


(a) ожидаемая точность в обеих гипотезах

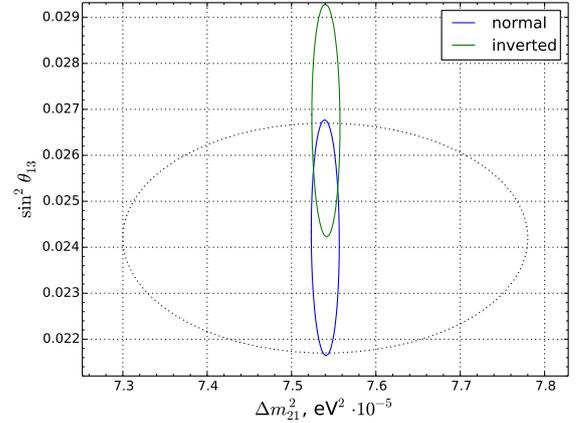


(b) ожидаемая точность в сравнении с текущими оценками

Рис. 6.14:  $1\sigma$ -контурсы на плоскости параметров  $\Delta m_{21}^2$ ,  $\sin^2 \theta_{12}$ .



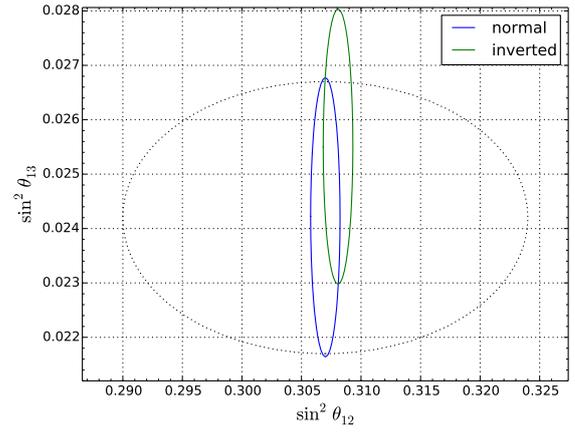
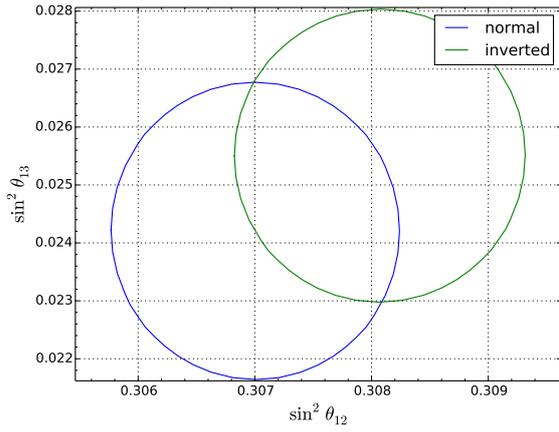
(a) ожидаемая точность в обеих гипотезах



(b) ожидаемая точность в сравнении с текущими оценками

Рис. 6.15:  $1\sigma$ -контурсы на плоскости параметров  $\Delta m_{21}^2$ ,  $\sin^2 \theta_{13}$ .

Таким образом, наблюдая за потоком нейтрино в части спектра, соответствующей минимуму вероятности выживания за счет солнечных осцилляций, эксперимент JUNO позволит существенно повысить точность определения соответствующих параметров  $\Delta m_{21}^2$  и  $\sin^2 \theta_{12}$  с ожидаемой неопределённостью при заданной иерархии  $\delta \Delta m_{21}^2 \sim 0,016$ .



(а) ожидаемая точность в обеих гипотезах (б) ожидаемая точность в сравнении с текущими оценками

Рис. 6.16:  $1\sigma$ -контурсы на плоскости параметров  $\sin^2 \theta_{12}$ ,  $\sin^2 \theta_{13}$ .

$10^{-5} \text{ эВ}^2$  (текущие оценки  $\delta \Delta m_{21}^2 \sim 0,24 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2$ ),  $\delta \sin^2 \theta_{12} \sim 0,0012$  (текущие оценки  $\delta \sin^2 \theta_{12} \sim 0,017$ ).

# Глава 7

## Результаты анализа чувствительности эксперимента NOVA

### 7.1 Определение иерархии масс в эксперименте

Для интерпретации наблюдаемых данных и анализа чувствительности в эксперименте NOVA существенно новым фактором, по сравнению с методами анализа, использовавшимися для эксперимента JUNO, является зависимость ожидаемого числа событий от CP-нарушения  $\delta$ , оценки и ограничения на значения которого на сегодняшний день не были получены ни в одном эксперименте. Поэтому разделение иерархии посредством введения функции правдоподобия при фиксированном наборе параметров в принципе невозможно и при определении гипотезы, лучшим образом описывающим наблюдения, значения  $\delta_{\text{NH}}$  и  $\delta_{\text{IH}}$  в предположении нормальной и обратной иерархий соответственно, следует считать полностью независимыми.

С учётом неприменимости гауссового приближения для наблюдаемых чисел событий и отмеченной выше выделенности параметра  $\delta$ , для статистического анализа чувствительности эксперимента NOVA была проведена следующая процедура, аналогичная описанной в разделе 6.2:

1. Задаётся значение произвольного свободного параметр  $\delta$ .
2. Для каждой гипотезы  $\alpha \in \{\text{NH}, \text{IH}\}$  производится выборка из  $K$  возможных наблюдений  $(\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \dots, \mathbf{n}^{(K)})_{\alpha}$ . Для генерации каждого элемента выборки  $\mathbf{n}^{(i)}$  сначала случайным образом выбирается набор параметров  $\boldsymbol{\theta}$ , куда входят все параметры с конечной априорной неопределённостью, из гауссового распределения со средним и дисперсией, соответствующим центральному значению и известной неопределённости данного параметра. После, за наблюдение  $\mathbf{n}^{(i)}$  принимается набор реализаций пуассоновских случайных величин с параметрами из расчётного предсказания  $\boldsymbol{\mu}_{\alpha}(\delta, \boldsymbol{\theta})$  при данных параметрах. Таким образом выборка содержит

статистические флуктуации наблюдений при различных значениях параметров  $\theta$  в соответствии с их априорной неопределённостью

3. Для каждого наблюдения  $\mathbf{n}$  определяется пара наборов  $\hat{\theta}_{\text{NH}}$  и  $\hat{\theta}_{\text{IH}}$  а также пара параметров  $\hat{\delta}_{\text{NH}}$  и  $\hat{\delta}_{\text{IH}}$ , дающих наилучшее соответствие теоретического предсказания данному наблюдению в нормальной и обратной иерархиях соответственно, путём минимизации суммы логарифмической функции правдоподобия  $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\mu_{\alpha}; \alpha)$  и штрафных членов для параметров  $\theta$ :

$$\hat{\delta}_{\alpha}(\mathbf{n}), \hat{\theta}_{\alpha}(\mathbf{n}) = \arg \min_{\delta, \theta} \left[ \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\mu_{\alpha}(\delta, \theta); \alpha) + \sum_i \left( \frac{\theta_i - \bar{\theta}_i}{\delta \theta_i} \right)^2 \right].$$

В дальнейшем в данном разделе минимизируемую функцию будем обозначать как  $\chi_{\mathbf{n}}^2(\mu_{\alpha}; \alpha)$ .

4. По каждой из выборок  $\alpha$  строится эмпирическое распределение функции:

$$\Delta\chi^2(\mathbf{n}; \alpha, \delta) = \chi_{\mathbf{n}}^2(\mu_{\text{NH}}(\hat{\delta}_{\text{NH}}, \hat{\theta}_{\text{NH}}); \text{NH}) - \chi_{\mathbf{n}}^2(\mu_{\text{IH}}(\hat{\delta}_{\text{IH}}, \hat{\theta}_{\text{IH}}); \text{IH})$$

и исходя из условия равенства частоты неверного определения иерархии выбирается значение  $\Delta\chi_{\text{cut}}^2(\delta)$  являющееся граничным для разделения иерархий – при  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}) < \Delta\chi_{\text{cut}}^2$  принимается гипотеза нормальной иерархии масс, при  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}) > \Delta\chi_{\text{cut}}^2$  – гипотеза обратной иерархии.

## 7.2 Статистическая значимость определения иерархии масс

Выполняя данную процедуру для каждого  $\delta$  и интерпретируя относительное количество наблюдений из выборки нормальной иерархии, для которых статистика  $\Delta\chi^2(\mathbf{n})$  указывает на справедливость гипотезы обратной  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}) > \Delta\chi_{\text{cut}}^2(\delta)$ , (или, что по построению равно, относительное количество наблюдений из выборки обратной иерархии с  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}) < \Delta\chi_{\text{cut}}^2(\delta)$ ) как оценку чувствительности эксперимента, можно получить зависимость  $N_{\sigma}(\delta)$ .

Данный способ определения чувствительности требует априорного знания точного значения  $\delta$  при анализе данных, так как разделяющая величина  $\Delta\chi_{\text{cut}}^2(\delta)$  существенно зависит от  $\delta$ , что видно из рис. 7.1, на которых изображены графики эмпирических распределений статистики  $\Delta\chi^2(\mathbf{n})$  при нескольких характерных значениях  $\delta$  и указано соответствующее положение  $\Delta\chi_{\text{cut}}^2$ . Так, при  $\delta = 0$  (рис. 7.1a) и  $\delta = \pi$  (рис. 7.1a) наблюдается вырождение обеих гипотез – значения  $\Delta\chi^2(\mathbf{n})$  распределены вокруг нуля, то есть в каждой из гипотез существуют значения параметров, при котором противоположная гипотеза описывает наблюдение, что и исходная, при которой делалась выборка. При

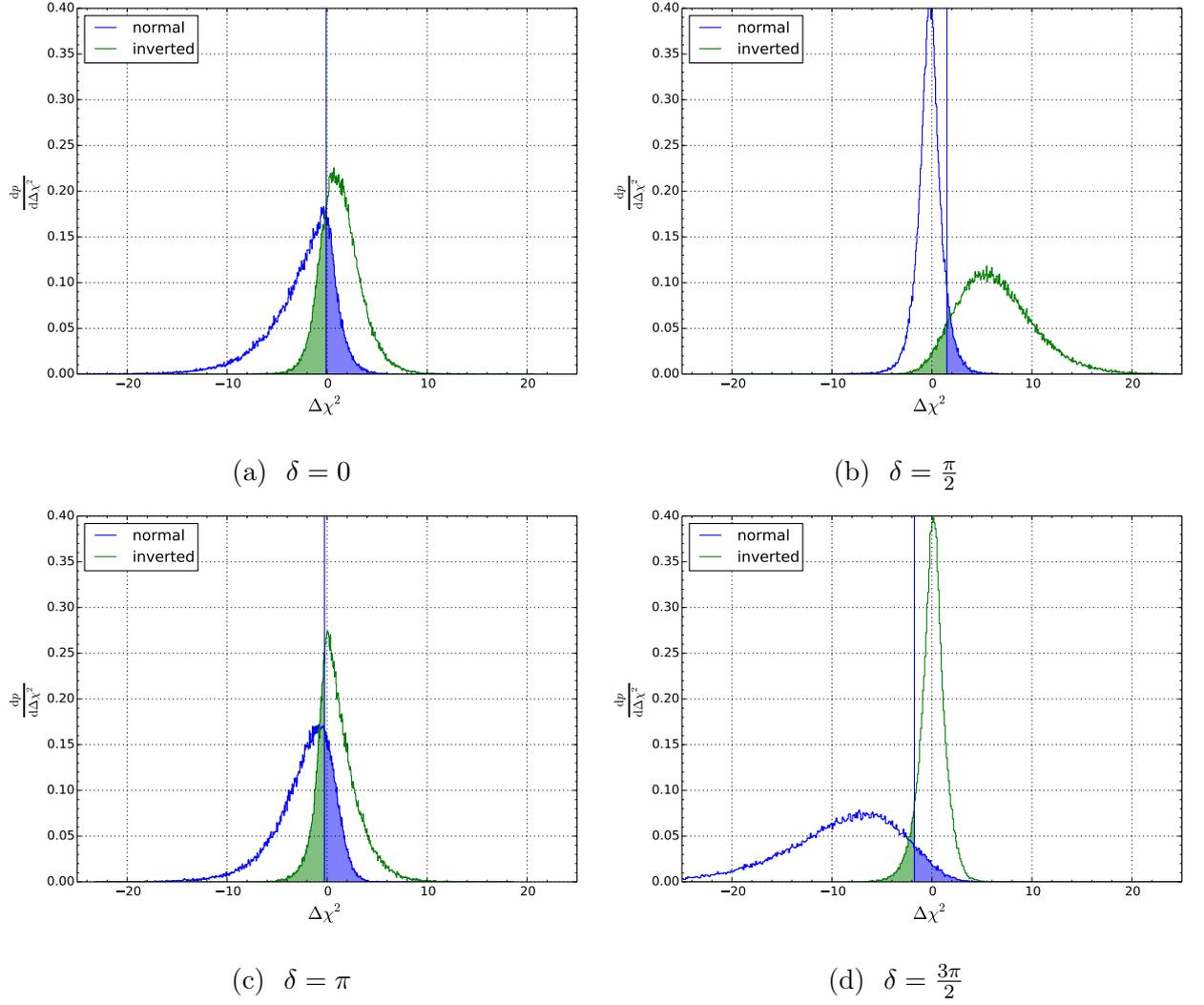


Рис. 7.1: Эмпирические распределения  $\Delta\chi^2(\mathbf{n})$ ,  $|\Delta m_{32}^2| = (2, 4 \pm 0, 1) \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$

этом  $\Delta\chi_{\text{cut}}^2$  для них располагается вблизи нуля, позволяя разделить гипотезы лишь со значимостью  $\sim 1, 2\sigma$ . Для значений  $\delta = \frac{\pi}{2}$  (рис. 7.1b) и  $\delta = \frac{3\pi}{2}$  (рис. 7.1d) распределение статистики асимметрично, для выборки в гипотезе нормальной иерархии при  $\delta = \frac{\pi}{2}$  и в гипотезе обратной при  $\delta = \frac{3\pi}{2}$  статистика распределена вокруг нуля, что свидетельствует о вырождении, противоположные гипотезы же не вырождены, распределения их значений  $\Delta\chi^2(\mathbf{n})$ , как и граничных значений  $\Delta\chi_{\text{cut}}^2$ , смещены в сторону  $\Delta\chi^2 > 0$  и  $\Delta\chi^2 < 0$  соответственно и позволяют разделить гипотезы со значимостью  $\sim 1, 7\sigma$ . Но так как априори значение  $\delta$  неизвестно, при обработке экспериментальных данных нет никаких оснований выбрать лишь один из рассмотренных случаев распределений  $\Delta\chi^2(\mathbf{n})$ , полученные этим способом оценки нельзя интерпретировать как ожидаемую на данный момент чувствительность эксперимента NOVA к иерархии.

Для устранения неопределённости следует использовать процедуру разделения иерархий независимую от  $\delta$ . Так как в окрестности  $\Delta\chi^2 = 0$  вследствие вырождения при  $\delta = \frac{\pi}{2}$  и  $\delta = \frac{3\pi}{2}$  могут давать практически одинаковый вклад как гипотеза

нормальной (7.1b), так и обратной (7.1d) иерархии, независящим от значения  $\delta$  критерием разделения иерархий по значению  $\Delta\chi^2(\mathbf{n})$  следует исключить эту область из рассмотрения, полагая что если экспериментально определённое значение  $\Delta\chi^2(\mathbf{n})$  в неё попадает, иерархия в данном эксперименте не разрешима. Этого можно добиться введя два граничных значения  $\Delta\chi_{\text{cut}}^{2-} < \Delta\chi_{\text{cut}}^{2+}$  и принимая гипотезу нормальной иерархии при наблюдаемом  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}) < \Delta\chi_{\text{cut}}^{2-}$ , а гипотезу обратной иерархии при  $\Delta\chi^2(\mathbf{n}) > \Delta\chi_{\text{cut}}^{2+}$ , оставляя область  $\Delta\chi_{\text{cut}}^{2-} < \Delta\chi^2(\mathbf{n}) < \Delta\chi_{\text{cut}}^{2+}$  неопределённой.

В зависимости от конкретного выбора граничных значений  $\Delta\chi_{\text{cut}}^{2-}$  и  $\Delta\chi_{\text{cut}}^{2+}$  при каждом значении  $\delta$  значения чувствительности эксперимента к определению данной иерархии масс и статистическая значимость определяются аналогично (6.5), (6.6) как:

$$p_{\text{NH}}^{\text{t}}(\delta) = \int_{-\infty}^{\Delta\chi_{\text{cut}}^{2-}} \frac{dp_{\text{NH}}}{d\Delta\chi^2} d\Delta\chi^2, \quad p_{\text{IH}}^{\text{t}} = \int_{\Delta\chi_{\text{cut}}^{2+}}^{+\infty} \frac{dp_{\text{IH}}}{d\Delta\chi^2} d\Delta\chi^2, \quad (7.1)$$

$$p_{\text{NH}}^{\text{f}} = \int_{-\infty}^{\Delta\chi_{\text{cut}}^{2-}} \frac{dp_{\text{IH}}}{d\Delta\chi^2} d\Delta\chi^2, \quad p_{\text{IH}}^{\text{f}} = \int_{\Delta\chi_{\text{cut}}^{2+}}^{+\infty} \frac{dp_{\text{NH}}}{d\Delta\chi^2} d\Delta\chi^2, \quad (7.2)$$

где теперь в общем случае

$$p_{\text{NH}}^{\text{t}} + p_{\text{IH}}^{\text{f}} \neq 1, \quad p_{\text{NH}}^{\text{f}} + p_{\text{IH}}^{\text{t}} \neq 1.$$

В данной работе в качестве граничных выбраны значения:

$$\Delta\chi_{\text{cut}}^{2-} = \min_{\delta} \Delta\chi_{\text{cut}}^2(\delta), \quad \Delta\chi_{\text{cut}}^{2+} = \min_{\delta} \Delta\chi_{\text{cut}}^2(\delta), \quad (7.3)$$

При таком подходе чувствительность к каждой из гипотез, выраженная в количестве стандартных отклонений равна соответствующей статистической значимости только для тех  $\delta$ , при которых  $\Delta\chi_{\text{cut}}^2(\delta)$  достигает максимума или минимума, в общем же случае:

$$(N_{\sigma}^{\text{sgnf}})_{\alpha}(\delta) \neq (N_{\sigma}^{\text{sens}})_{\alpha}(\delta).$$

Однако, как будет видно, условие (7.3) при всех  $\delta$  обеспечивает статистическую значимость наблюдения гипотезы не меньше чувствительности к ней:

$$(N_{\sigma}^{\text{sgnf}})_{\alpha}(\delta) \gtrsim (N_{\sigma}^{\text{sens}})_{\alpha}(\delta).$$

## 7.2.1 Оценки ожидаемой чувствительности

С использованием подхода с явно зависящим от  $\delta$  граничным значением  $\Delta\chi_{\text{cut}}^2$  для эксперимента NOVA с учётом совместного анализа данных в режиме наблюдения нейтрино и антинейтрино (по 3 года работы) была получена оценка ожидаемой

чувствительности представленная на рис. 7.2. Видно, что при точном знании фазы CP-нарушения  $\delta$  анализ экспериментальных данных позволит определить иерархию масс с чувствительностью и статистической значимостью до  $\sim 1,75\sigma$  при условии  $\delta = \frac{\pi}{2}$  или  $\delta = \frac{3\pi}{2}$ . При отклонении от данных значений  $\delta$  чувствительность падает, и при  $\delta = 0$  и  $\delta = \pi$  практически полностью пропадает, позволяя сделать вывод об иерархии лишь на уровне  $\sim 1\sigma$  вследствие вырожденности обеих иерархий (рис. 7.1a), (рис. 7.1a).

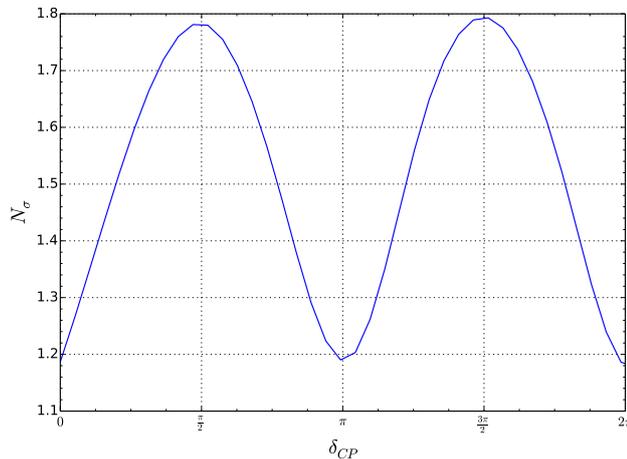
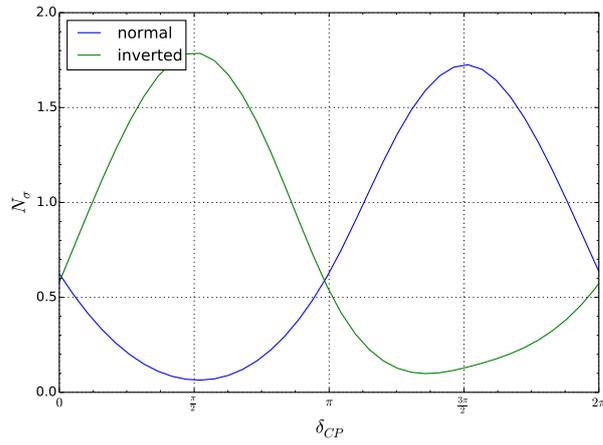


Рис. 7.2: Зависимость чувствительности от фазы  $\delta$  при разделении гипотез значением  $\Delta\chi^2_{\text{cut}}(\delta)$ ; выборка с  $|\Delta m_{32}^2| = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$

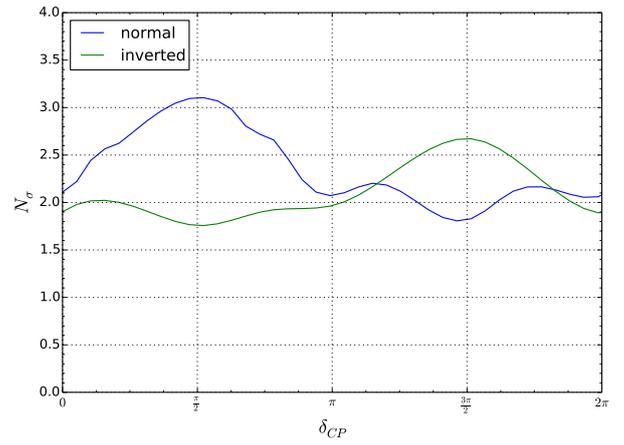
В подходе, не требующем априорного знания  $\delta$  для анализа экспериментальных данных, чувствительности и статистические значимости различны и представлены на рис. 7.3a и рис. 7.3b соответственно. Таким образом, с учётом вырождение обеих гипотез при разных  $\delta$  (рис. 7.1b), (рис. 7.1d) максимальная ожидаемая чувствительность  $\sim 1,7\sigma$  со статистической значимостью также  $1,7\sigma$  достигается при  $\delta = \frac{\pi}{2}$  и обратной иерархии масс или при  $\delta = \frac{3\pi}{2}$  и нормально иерархии, а при  $\delta < \pi$  ( $\delta > \pi$ ) чувствительность к нормальной (обратной) иерархии полностью отсутствует.

### 7.3 Сравнение с “методом $\sqrt{\Delta\chi^2}$ ”

Интерпретируя аналогично (6.8) величину  $\sqrt{\Delta\chi^2(\mu_\alpha; \delta)}$  как чувствительность эксперимента в стандартных отклонениях, можно получить её зависимость от  $\delta$  изображённую на рис. 7.4. Согласно с результатом статистического анализа на рис. 7.3a в диапазонах фазы  $\delta$ , при которой обнаружение иерархии принципиально возможно, оценка методом  $\sqrt{\Delta\chi^2(\mu_\alpha; \delta)}$  предсказывая большую чувствительность достигающую  $\approx 2,9\sigma$  в максимуме при нормальной иерархии. Учитывая необоснованность интерпретации  $\sqrt{\Delta\chi^2(\mu_\alpha; \delta)}$  как количественной меры чувствительности для оценки дискретных переменных, применение данного метода для оценки чувствительности к иерархии не



(a) оценка чувствительности



(b) оценка статистической значимости

Рис. 7.3: Зависимость чувствительности и статистической значимости от фазы  $\delta$  при разделении гипотез интервалом  $[\Delta\chi_{\text{cut}}^{2-}(\delta), \Delta\chi_{\text{cut}}^{2+}(\delta)]$ ; выборка с  $|\Delta m_{32}^2| = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$ .

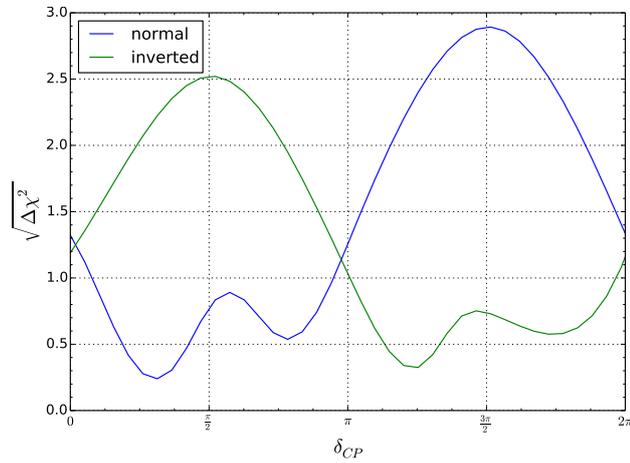


Рис. 7.4: Функция  $\sqrt{\Delta\chi^2(\mu_\alpha; \delta)}$  в зависимости от фазы  $\delta$ ;  $|\Delta m_{32}^2| = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$

оправдано.

# Глава 8

## Результаты совместного анализа чувствительности экспериментов JUNO и NOVA

### 8.1 Определение иерархии масс

Учитывая, что по проведённым оценкам чувствительность обоих из рассмотренных экспериментов по отдельности к иерархии масс довольно низка ( $< 2\sigma$ ), имеет особый смысл проводить совместный анализ данных нескольких экспериментов для получения большей статистической значимости результата. Используя те же модели экспериментов JUNO и NOVA была проведена оценка их ожидаемой совместной чувствительности и значимости определения иерархии масс нейтрино.

Так как указанные при анализе эксперимента NOVA особенности, связанные с полной неопределённостью параметра CP-нарушения  $\delta$ , остаются и при совместном его анализе вместе с экспериментом JUNO, для оценки была использована общая процедура, близкая к описанной в разделе (7.1), с учётом следующих изменений с целью включения в анализ эксперимента JUNO.

1. В качестве набора параметров  $\theta$  выбираются все параметры обоих экспериментов: общие осцилляционные параметры, неопределённости сечений NOVA и неопределённости нормировок потоков JUNO.
2. Под средним предсказанием  $\mu_\alpha(\delta, \theta)$  понимается объединение гистограмм ожидаемого числа событий по энергии эксперимента JUNO  $\mu_\alpha^J(\delta, \theta)$  и NOVA  $\mu_\alpha^N(\delta, \theta)$ , аналогично для наблюдений  $\mathbf{n}$ .
3. В качестве минимизируемой функции  $\chi_{\mathbf{n}}^2(\mu_\alpha; \alpha)$  принимается сумма функции  $\chi_{\mathbf{n}^J}^2(\mu_\alpha^J; \alpha)$ , логарифмической функции правдоподобия  $\mathcal{L}_{\mathbf{n}^N}(\mu_\alpha^N; \alpha)$  и штрафных

членов всех параметров набора  $\theta$

$$\chi_{\mathbf{n}}^2(\boldsymbol{\mu}_\alpha; \alpha) \equiv \chi_{\mathbf{n}^J}^2(\boldsymbol{\mu}_\alpha^J(\boldsymbol{\theta}); \alpha) + \mathcal{L}_{\mathbf{n}^N}(\boldsymbol{\mu}_\alpha^N(\delta, \boldsymbol{\theta}); \alpha) + \sum_i \left( \frac{\theta_i - \bar{\theta}_i}{\delta\theta_i} \right)^2.$$

В результате были получены эмпирические распределения статистики  $\Delta\chi^2(\mathbf{n})$  от  $\sigma$ , аналогичные 7.1 и учитывающие также информацию из эксперимента JUNO, представленные на рис. 8.1. По сравнению с 7.1 наблюдается уменьшение вырождения обоих из гипотез. Результаты анализа совместной чувствительности теми же методами, что и для эксперимента NOVA, представлены на рис. 8.2 (чувствительность к иерархии при фиксированном значении  $\delta$ ) и рис. 8.3а, рис. 8.3б – чувствительность и статистическая значимость определения иерархии без использования априорных значений  $\delta$ .

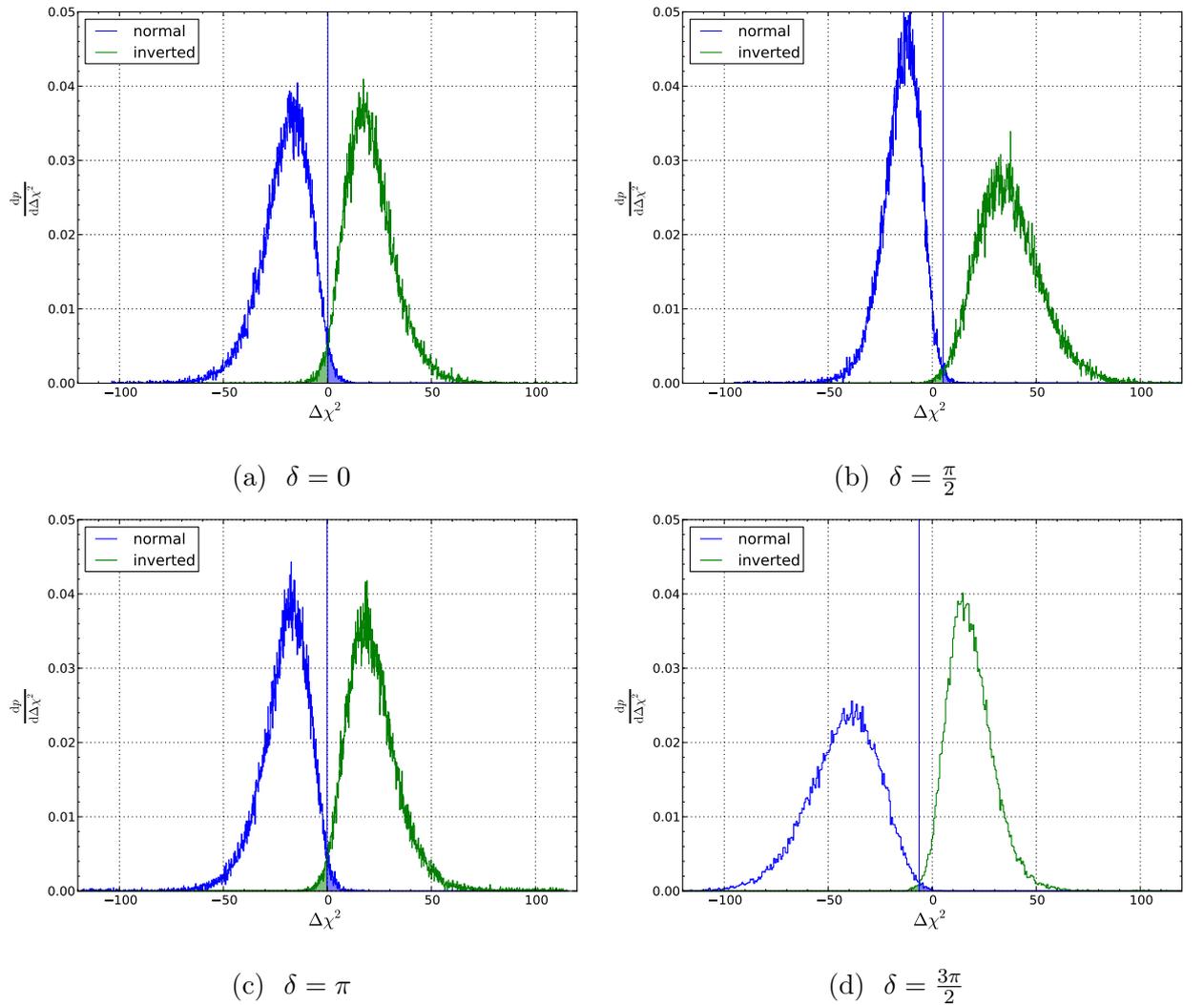


Рис. 8.1: Эмпирические распределения  $\Delta\chi^2(\mathbf{n})$  при совместном анализе JUNO и NOVA,  $|\Delta m_{32}^2| = (2, 4 \pm 0, 1) \cdot 10^{-3} \text{эВ}^2$

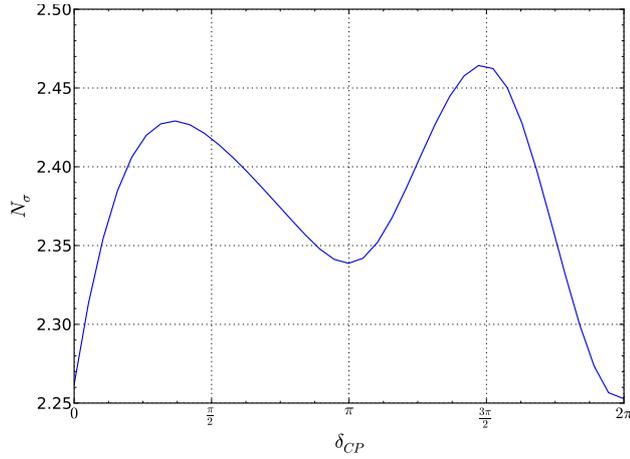
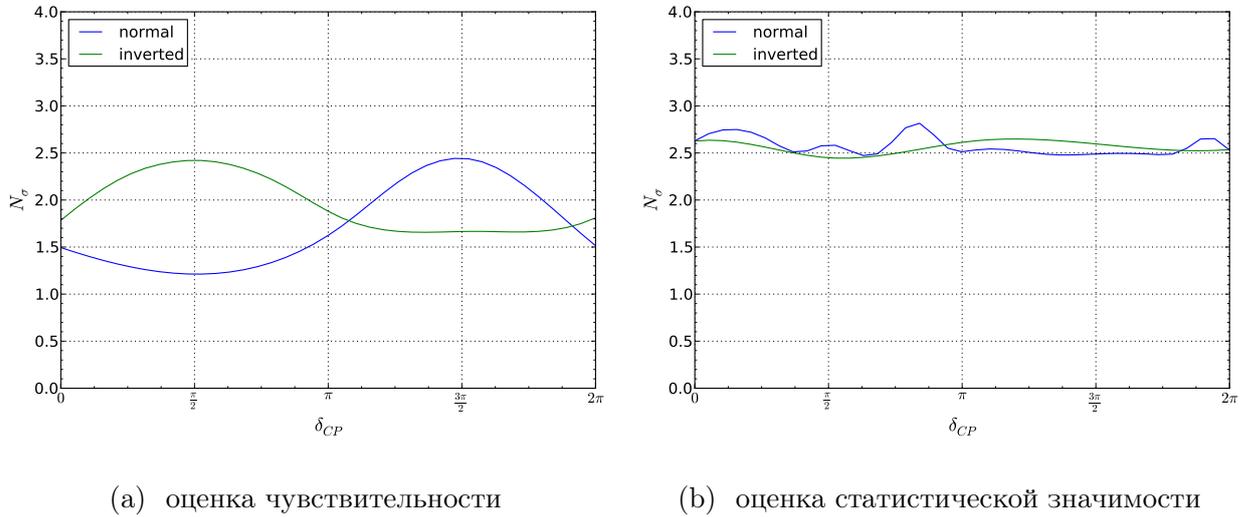


Рис. 8.2: Зависимость чувствительности от фазы  $\delta$  при разделении гипотез значением  $\Delta\chi_{\text{cut}}^2(\delta)$  при совместном анализе JUNO и NOVA; выборка с  $|\Delta m_{32}^2| = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$



(a) оценка чувствительности

(b) оценка статистической значимости

Рис. 8.3: Зависимость чувствительности и статистической значимости от фазы  $\delta$  при разделении гипотез интервалом  $[\Delta\chi_{\text{cut}}^{2-}(\delta), \Delta\chi_{\text{cut}}^{2+}(\delta)]$  при совместном анализе JUNO и NOVA; выборка с  $|\Delta m_{32}^2| = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$ .

# Выводы

На основании проделанной работы по исследованию чувствительности экспериментов JUNO и NOVA к определению иерархии масс можно сделать вывод, что ожидаемая статистическая значимость измерения довольно низка и не превышает уровня  $\sim 1,8\sigma$ . Полученная значимость существенно меньше некоторых полученных ранее оценок, используемых коллаборациями NOVA [23] и JUNO [15], и не является достаточной для окончательного решения проблемы иерархии масс, однако результат экспериментов может служить указанием на реализацию одной из возможных иерархий. Увеличение точности измерения осцилляционных параметров, в особенности атмосферной разности масс, что ожидается в эксперименте Daya Bay, позволит улучшить значимость измерения иерархии в эксперименте JUNO до  $\sim 2\sigma$ . Чувствительность NOVA существенно зависит от неизвестного параметра – фазы CP-нарушения  $\delta$ , приводя к вырождению иерархий, получения оценок на данный параметр также позволит улучшить чувствительность эксперимента NOVA.

Учитывая относительно низкую чувствительность рассмотренных экспериментов, представляется перспективным совместный анализ наблюдений нескольких экспериментов с целью определения иерархии. В работе показано, что чувствительность совместного анализа JUNO и NOVA может достигать  $\sim 2,5\sigma$  при некоторых значениях  $\delta$ , что выше чувствительности каждого из экспериментов в отдельности.

В дальнейшем планируется расширить анализ чувствительности к иерархии масс, включив такие эксперименты как T2HK и LBNE, а также исследовать точность оценки других осцилляционных параметров в совместном анализе.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Kim T. L. Reactor Neutrinos / Soo-Bong Kim, Thierry Lasserre and Yifang Wang // Advances in High Energy Physics – 2013 – Vol. 2013. – Article ID 453816
- [10] Coloma P. Systematic uncertainties in long-baseline neutrino oscillations for large  $\theta_{13}$  / Coloma, Pilar and Huber, Patrick and Kopp, Joachim and Winter, Walter // Phys.Rev. – 2013 – Vol. D87. – P. 033004.
- [11] Mueller T. Improved Predictions of Reactor Antineutrino Spectra / Mueller, Th.A. and Lhuillier, D. and Fallot, M. and Letourneau, A. and Cormon, S. and others // Phys.Rev. – 2011 – Vol. C83. – P. 054615.
- [12] Huber P. On the determination of anti-neutrino spectra from nuclear reactors / Huber, Patrick // Phys.Rev. – 2011 – Vol. C84. – P. 024617.
- [13] Xing S. Z. Neutrinos in Particle Physics, Astronomy and Cosmology / Zhi-Zhong Xing, Shun Zhou – Springer, 2011 – 441 p. – ISBN 978-3-642-17559-6
- [14] Fogli G. L. Getting the most from the statistical analysis of solar neutrino oscillations / Fogli, G. L. and Lisi, E. and Marrone, A. and Montanino, D. and Palazzo, A. // Phys. Rev. D – 2002 – Vol. 66. – Issue 5 – P. 053010.
- [15] Li Y.-F. Unambiguous determination of the neutrino mass hierarchy using reactor neutrinos / Li, Yu-Feng and Cao, Jun and Wang, Yifang and Zhan, Liang // Phys. Rev. D – 2013 – Vol. 88. – Issue 1 – P. 013008.
- [16] Sanshiro E. Geoneutrino Spectrum and Luminosity / Enomoto Sanshiro // <http://www.awa.tohoku.ac.jp/sanshiro/research/geoneutrino/spectrum/index.html>
- [17] An F. Improved Measurement of Electron Antineutrino Disappearance at Daya Bay / An, F.P. and others // Chin.Phys. – 2013 – Vol. C37. – P. 011001.
- [18] Capozzi F. Neutrino mass hierarchy and electron neutrino oscillation parameters with one hundred thousand reactor events / Capozzi, F. and Lisi, E. and Marrone, A. // Phys.Rev. – 2014 – Vol. D89. – P. 013001.

- [19] Huang Y. A reference Earth model for the heat-producing elements and associated geoneutrino flux / Huang, Yu and Chubakov, Viacheslav and Mantovani, Fabio and Rudnick, Roberta L. and McDonough, William F. // *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* – 2013 – Vol. 14. – P. 2003–2029.
- [2] Bilenky S. *Introduction to the Physics of Massive and Mixed Neutrinos* / Samoil Bilenky – Springer, 2010 – 270 p. – ISBN 978-3-642-14042-6
- [20] Vogel P. Angular distribution of neutron inverse beta decay, anti-neutrino(e) + p  $\rightarrow$  e<sup>+</sup> + n / Vogel, P. and Beacom, John F. // *Phys.Rev.* – 1999 – Vol. D60. – P. 053003.
- [21] Vogel P. Analysis of the antineutrino capture on protons / Vogel, P. // *Phys. Rev. D* – 1984 – Vol. 29. – Issue 9 – P. 1918–1922.
- [22] Наумов Д. В. Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов. Электрослабая модель в примерах / Д. В. Наумов – в печати
- [23] Bian J. The NOvA Experiment: Overview and Status / Jianming Bian // – arXiv:1309.7898 [hep-ex] – DPF 2013 Meeting of the American Physical Society Division of Particles and Fields, Santa Cruz, California, August 13-17, 2013
- [24] Formaggio J. A. From eV to EeV: Neutrino cross sections across energy scales / Formaggio, J. A. and Zeller, G. P. // *Rev. Mod. Phys.* – 2012 – Vol. 84. – Issue 3 – P. 1307–1341.
- [25] Kuzmin K. S. Quasielastic axial-vector mass from experiments on neutrino–nucleus scattering / Kuzmin, K. S. and Lyubushkin, V. V. and Naumov, V. A. // *The European Physical Journal C* – 2008 – Vol. 54. – P. 517–538.
- [26] Kuzmin K. S. Axial masses in quasielastic neutrino scattering and single-pion neutrino production on nucleons and nuclei / Konstantin S. Kuzmin and Vladimir V. Lyubushkin and Vadim A. Naumov // *Acta Phys. Polon.* – 2006 – Vol. B37. – P. 2337–2348. – XXth Max Born Symposium 'Nuclear effects in neutrino interactions,' Wroclaw, Poland, December 7-10, 2005
- [27] Kuzmin K. S. Neutrino scattering off nucleons and polarization of charged leptons in quasielastic reactions, PhD Thesis, / Kuzmin, K. S. – JINR. Dubna, 2009
- [28] Betancourt M. Study of Quasi-Elastic Scattering in the NOvA Detector Prototype, PhD Thesis, / Betancourt, M. – University of Minnesota, 2013
- [29] Rein D. Neutrino-excitation of baryon resonances and single pion production / Dieter Rein and Lalit M Sehgal // *Annals of Physics* – 1981 – Vol. 133. – P. 79–153. –

- [3] Ludhova L. Studying the Earth with Geoneutrinos / L. Ludhova and S. Zavatarelli // Advances in High Energy Physics – 2013 – Vol. 2013. – Article ID 425693
- [30] Naumov V. A. Three-neutrino oscillations in matter, CP-violation and topological phases / Naumov, V. A. // International Journal of Modern Physics D – 1992 – Vol. 01. – P. 379–399.
- [31] Nunokawa H. Another possible way to determine the neutrino mass hierarchy / Nunokawa, Hiroshi and Parke, Stephen J. and Zukanovich Funchal, Renata // Phys.Rev. – 2005 – Vol. D72. – P. 013009.
- [4] An F. Observation of electron-antineutrino disappearance at Daya Bay / An, F.P. and others // Phys.Rev.Lett. – 2012 – Vol. 108. – P. 171803.
- [5] Ahn J. Observation of Reactor Electron Antineutrino Disappearance in the RENO Experiment / Ahn, J.K. and others // Phys.Rev.Lett. – 2012 – Vol. 108. – P. 191802.
- [6] Abe Y. Indication of Reactor  $\bar{\nu}_e$  Disappearance in the Double Chooz Experiment / Abe, Y. et al // Phys. Rev. Lett. – 2012 – Vol. 108. – Issue 13 – P. 131801.
- [7] Abe Y. Indication for the disappearance of reactor electron antineutrinos in the Double Chooz experiment / Abe, Y. and others // Phys.Rev.Lett. – 2012 – Vol. 108. – P. 131801.
- [8] Adamson P. Electron neutrino and antineutrino appearance in the full MINOS data sample / Adamson, P. and others // Phys.Rev.Lett. – 2013 – Vol. 110. – P. 171801.
- [9] Abe K. Evidence of Electron Neutrino Appearance in a Muon Neutrino Beam / Abe, K. and others // Phys.Rev. – 2013 – Vol. D88. – P. 032002.