

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**  
Государственное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования

**Иркутский Государственный Университет**

---

**Международная организация**  
**Объединенный Институт Ядерных Исследований**  
**Лаборатория Ядерных Проблем**

Физический факультет  
Кафедра теоретической физики  
Заведующий кафедрой  
Профессор Валл А. Н.

---

**Дипломная работа**  
**Нейтринные осцилляции в рамках квантовой теории поля**

Руководители  
\_\_\_\_\_ к.ф.-м.н. Наумов Д. В. (ОИЯИ),  
\_\_\_\_\_ к.ф.-м.н. Наумов В. А. (ОИЯИ),  
\_\_\_\_\_ проф. Калошин А. Е. (ИГУ)  
Студент группы 1521  
\_\_\_\_\_ Ли В. А.  
Работа защищена  
с оценкой \_\_\_\_\_  
“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2008  
Нормоконтролер  
\_\_\_\_\_ доц. Персиков В. М.

Рецензент

---

Дубна-Иркутск 2008 г.

## **Задание на дипломную работу**

Получить формулу вероятности нейтринных осцилляций в вакууме и в веществе (MSW-эффект) в нерелятивистской квантовой механике, для случаев смешивания двух и трёх нейтрино. Получить формулу двухнейтринных осцилляций из трёхнейтринной формулы. Получить формулу вероятности нейтринных осцилляций в вакууме и в веществе в рамках квантовой теории поля с волновыми пакетами. Проанализировать переход к плоским волнам. Получить дифференциальное сечение квазиупругого рассеяния массивного нейтрино на нуклоне, не пренебрегая массой нейтрино и учитывая точную кинематику этого процесса. Получить полное сечение, не пренебрегая импульсом конечного нуклона и разностью масс протона и нейтрона. Разобраться насколько средняя энергия протона отличается от его массы. Перейти к случаю смешанных нейтрино. Проанализировать некогерентную сумму сечений рассеяния отдельного массивного нейтрино на нуклоне, получить пределы изменения этой суммы при экспериментально допустимых значениях углов смешивания и масс нейтрино. Получить формулу скорости счета реликтовых нейтрино в этом подходе.

## Реферат

В настоящей работе рассматривается:

- Явление нейтринных осцилляций в вакууме и в веществе в рамках нерелятивистской квантовой механики и отдельно в рамках квантовой теории поля с волновыми пакетами. Получены и исследованы формулы вероятности нейтринных осцилляций в вакууме и в веществе в обоих подходах. Отдельное внимание уделяется новому эффекту, связанному с локализацией частиц в элементарном источнике и детекторе.
- Квазиупругое рассеяние массивного нейтрино на нейтроне  $\nu_i n \rightarrow p e^-$  и возможность использования реакции обратного  $\beta$ -распада для обнаружения реликтовых нейтрино. Решена задача нахождения полной кинематики и сечения рассеяния для этой реакции. Получены оценки скорости счета реликтовых нейтрино с учетом смешивания нейтрино при различных экспериментально допустимых значениях углов смешивания и отношений концентраций массивных реликтовых нейтрино для двух типов иерархий масс нейтрино.

## Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Основные источники нейтрино</b>	<b>5</b>
1.1 Солнечные нейтрино . . . . .	7
1.2 Атмосферные нейтрино . . . . .	9
1.3 Ускорительные нейтрино . . . . .	10
1.4 Реакторные нейтрино . . . . .	11
1.5 Другие источники . . . . .	12
<b>2 Нейтриинные осцилляции в квантовой механике</b>	<b>14</b>
2.1 Двухнейтриинные осцилляции . . . . .	14
2.2 Трёхнейтриинные осцилляции . . . . .	16
2.2 Переход от трёх-компонентной формулы к двух-компонентной . . . . .	17
2.4 Нейтриинные осцилляции в веществе, MSW-эффект . . . . .	18
2.5 Резюме . . . . .	20
<b>3 Квантовая теория поля и нейтриинные осцилляции</b>	<b>21</b>
3.1 Волновые пакеты . . . . .	22
3.2 Лагранжиан взаимодействия . . . . .	23
3.3.1 Нейтриинные осцилляции в вакууме . . . . .	24
3.3.1 Амплитуда . . . . .	24
3.3.2 Квадрат модуля амплитуды и вероятность нейтриинных осцилляций . . . . .	30
3.4 Нейтриинные осцилляции в веществе . . . . .	34
3.4.1 Амплитуда . . . . .	35
3.4.2 Функция Грина и вероятность осцилляций . . . . .	38
3.5 Резюме . . . . .	39
<b>4 Рассеяние <math>\nu_i + n \rightarrow e^- + p</math> и обратный <math>\beta</math>-распад</b>	<b>40</b>
4.1 Дифференциальное сечение рассеяния . . . . .	42
4.2 Кинематика $\nu_i + N \rightarrow N' + \ell$ . . . . .	43
4.2.1 Реакция с порогом . . . . .	46
4.3 Полное сечение рассеяния . . . . .	47
4.4 Реакция $\nu + n \rightarrow e^- + p$ , учитывая импульс протона . . . . .	50
4.4.1 Энергии нейтрино $E_\nu \lesssim 100$ MeV . . . . .	51
4.5 Некогерентная сумма сечений $\sigma_i$ . . . . .	52
4.6 Скорость счета числа событий . . . . .	54
4.6.1 Реликтовые нейтрино . . . . .	56
4.7 Резюме . . . . .	59
<b>Заключение</b>	<b>60</b>
<b>А Приложения</b>	
A.1 Оценка значения $\sigma^2$ . . . . .	61
A.2 Область применимости квантовой теории поля, волновые пакеты . . . . .	64
A.3 Полный пропагатор нейтрино, собственно-энергетическая часть и формула нейтриинных осцилляций . . . . .	65
A.4 Новое рассмотрение нейтриинных осцилляций в квантовой теории поля . . . . .	68
A.5 Рассеяние тепловых нейтронов на реликтовом (и других) нейтрино . . . . .	70
A.6 Поляризованные нейтроны, $\beta$ -распад и рассеяние на нейтрино . . . . .	71
A.7 Аннигиляция $e^+e^- \rightarrow \nu\bar{\nu}$ . . . . .	73
A.7.1 Сечение в переменных $s, t$ . . . . .	77
<b>Список литературы</b>	<b>79</b>

## Введение

Нейтрино — элементарные частицы со спином  $\hbar/2$ , которые могут участвовать только в слабых взаимодействиях. Каждому заряженному лептону: электрону, мюону, тау-лептону соответствует свой тип нейтрино. Начиная с теоретического предсказания существования нейтрино и изначального статуса нейтрино как “частицы-полтергейста”, физика нейтрино и слабых взаимодействий преподносит всё новые задачи. Одним из наиболее интересных явлений в физике нейтрино является смешивание, и как следствие этого осцилляции, нейтрино различных типов. Важнейшей проблемой для физики нейтрино, астрофизики и космологии является экспериментальное определение параметров осцилляций: значений разностей квадратов масс нейтрино, углов смешивания. Несмотря на успехи квантовой теории поля и Стандартной Модели в описании процессов рассеяния элементарных частиц, до сих пор при анализе большинства экспериментальных данных используются формулы для вероятности нейтринных осцилляций, выведенные в рамках нерелятивистской квантовой механики с плоскими волнами. Только начиная с середины 1990-х годов в теории нейтринных осцилляций делаются попытки применения аппарата квантовой теории поля к этой проблеме. Некоторый прогресс в этой области был сделан авторами работ [1, 2]–[12].

В настоящей работе подробно рассматривается явление нейтринных осцилляций: в разделе 1 приведен обзор основных источников нейтрино и экспериментов в области нейтринных осцилляций, в разделах 2 и 3 приведен вывод нейтринных осцилляций в вакууме и веществе: в широко известном подходе нерелятивистской квантовой механики со стационарным уравнением Шредингера, а также в квантовой теории поля с волновыми пакетами. В приложении A.1 показан переход к плоским волнам. Развитый формализм некогерентного сложения амплитуд в квантовой теории поля позволяет получить новые оценки скорости счета реликтовых нейтрино, это подробно рассматривается в разделе 4.

# 1 Основные источники нейтрино

Нейтрино от Солнца проходят сквозь Землю,  
и атомы в человеческом теле захватывают  
их в среднем один раз в семьдесят лет.  
Нейтрино захватили меня в начале моей карьеры.  
*Raymond Davis, [13]*

В 1930 году Паули выдвинул идею о существовании новой электрически нейтральной частицы со спином  $\hbar/2$ , которую назвал “нейтроном”<sup>1</sup>, чтобы объяснить непрерывный спектр электрона из реакции  $\beta$ -распада (1.1) и сохранение углового момента.



В 1934 году Ферми построили теорию  $\beta$ -распада (известную как теория Ферми, в которой взаимодействие имеет четырех-фермионный вид), и показал, что наряду с прямым процессом  $\beta$ -распада (1.1) должен существовать обратный процесс<sup>2</sup>:



Ферми было показано, что если нейтрино обладает энергией несколько MeV (мегаэлектрон-вольт), то сечение процесса (1.2) — захват нейтрино ядром, имеет порядок величины:  $\sigma \sim 10^{-44} \text{ см}^2$ . Это сечение меньше (больше чем на десяток порядков) известных к тому времени сечений электромагнитных и ядерных процессов рассеяния, поэтому предполагалось, что нейтрино нельзя экспериментально зарегистрировать. Зная сечение рассеяния, несложно сделать оценку эффективной длины свободного пробега нейтрино в веществе заданной плотности числа рассеивателей (положим, например,  $n = 10^{23}$  атомов в кубическом сантиметре — жидкий водород), получим:

$$l_{eff} = \left( \frac{10^{23}}{\text{cm}^3} 10^{-44} \text{ см}^2 \right)^{-1} = 10^{19} \text{ м} \quad (1.3)$$

Учитывая, что один световой год равен  $1 \text{ ly} = 0,95 \cdot 10^{16} \text{ м}$ , полученная эффективная длина (1.3) свободного пробега равна примерно 1000 световых лет, именно поэтому нейтрино носила статус “частицы, которую нельзя зарегистрировать“ более 20 лет с момента теоретического предсказания существования.

В Стандартной Модели взаимодействий между элементарными частицами считается, что нейтрино не распадаются, т. е. являются стабильными. За рамками СМ распад нейтрино возможен, и возможные варианты распада нейтрино обсуждаются, например, в работах [14], [15]. Сейчас известно, что реальными частицами, обладающими массой, являются массивные<sup>3</sup> нейтрино, а не флейворные. Из анализа данных эксперимента на ускорителе LEP (CERN) по ширине распада  $Z^0$ -бозона (аннигиляция  $e^+e^-$ , Рис. 1) считается, что число поколений легких ( $m_\nu < M_Z/2$ ) массивных нейтрино равно трем. Существование всех трех типов нейтрино подтверждено экспериментально, впервые взаимодействия (заряженный лептон соответствующего типа) этих нейтрино наблюдалось в экспериментах: “The Savannah River Experiment“ электронные антинейтрино от реактора (1956, F.Reines,

<sup>1</sup>Нейтрон был открыт в 1932 году Чадвиком, и в 1934 году Ферми переименовал частицу, предсказанную Паули в “нейтрино” (“маленький нейтрон” в пер. с ит.)

<sup>2</sup>Тогда еще не было известно, что нейтрино  $\nu$  и антинейтрино  $\bar{\nu}$  разные частицы. Антинейтрино и соответствующий отрицательно заряженный лептон должны стоять по одну сторону от знака  $\rightarrow$  в любой элементарной реакции рассеяния или распада.

<sup>3</sup>Термин массивные нейтрино в настоящей работе используется для обозначения нейтрино с определенной массой, а не для гипотетических нейтрино с массой больше массы  $Z$ -бозона.

Нобелевская премия 1995), [16], мюонные нейтрино в ускорительном эксперименте [17] (1962, Leon M. Lederman, Melvin Schwartz, Jack Steinberger, Нобелевская премия 1988), тау-нейтрино в эксперименте DONUT в 2000 году.

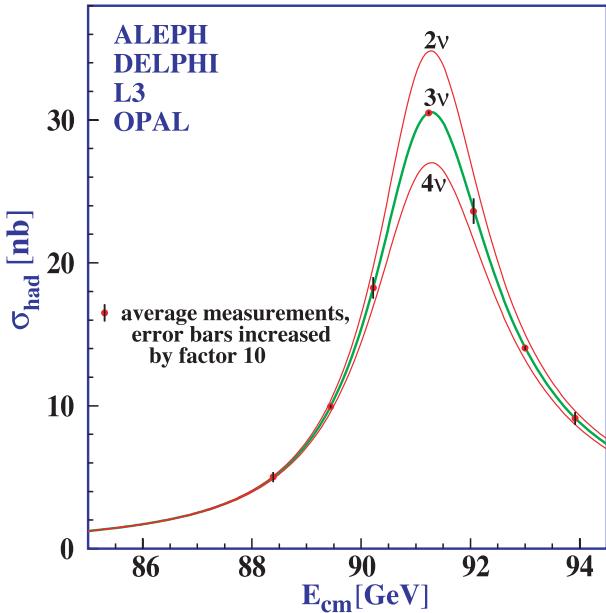


Рис. 1: Сечение  $e^+e^-$  аннигиляции вблизи  $Z$ -резонансной области, [18].

стабильными, электрически незаряженными с различными близкими к нулю массами, именно поэтому, и из предположения аналогичного, как для нижних кварков, смешивания нейтрино, следует явление осцилляций нейтрино и возможность наблюдения нейтринных осцилляций на макроскопическом уровне. Ниже приведен краткий обзор источников нейтрино с основными характеристиками и экспериментами.

В табл. 1 для реакторных и ускорительных экспериментов указан тип: на появление или исчезновение соответствующего нейтрино; так, например, в ускорительном эксперименте K2K ( $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, \nu_\mu \rightarrow \nu_e$ ) исследуются отношения потока мюонных нейтрино в ближнем детекторе к потоку: мюонных нейтрино (“исчезновение” мюонных нейтрино) и электронных нейтрино (“появление” электронных нейтрино) в дальнем детекторе. Все реакторные нейтринные эксперименты исследуют исчезновение электронных антинейтрино. (*FA*, Future Approved) — строящиеся утвержденные эксперименты; (*FP*, Future Projects) — будущие проекты экспериментов. (*S*), (*L*) — эксперименты с короткой (Short) или длинной (Long) базой  $L$  — расстоянием между источником и детектором.

Наблюдение дефицита потока солнечных нейтрино послужило к введению понятия перехода одного сорта нейтрино в другой. Как следствие этого возникла гипотеза об осцилляциях нейтрино. Такое название явление получило, потому что формула для вероятности перехода одного сорта нейтрино в другой содержит осциллирующий множитель:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 L}{4E} \quad (1.4)$$

Причиной осцилляций нейтрино является их смешивание. Существенная разница между лептонами и кварками находится во взаимодействии между ними: заряженные лептоны взаимодействуют электрически и слабо, нейтрино (“нижние”, незаряженные лептоны) только слабо, кварки электро-слабо и сильно (причина конфайнмента). Нейтрино являются

Таблица 1: Источники нейтрино и соответствующие эксперименты.

Источник нейтрино	Название и тип эксперимента	$\sim L$ , km	$\sim \langle E_\nu \rangle$ , MeV
Солнце $\nu_e$	BOREXino (жидкий сцинтиллятор), GALLEX, GNO, SAGE (радиохимический метод $\nu_e + {}^{71}\text{Ga} \rightarrow {}^{71}\text{Ge} + e^-$ ), Homestake (радиохимический метод $\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$ ), Kamiokande и Super-Kamiokande (водный черенковский детектор), SNO (черенковский детектор на тяжелой воде); (FA): LENS	$10^8$	0.1..10
Атмосфера $\nu_{e,\mu}, \bar{\nu}_{e,\mu}$	Baksan, Frejus, IMB, Kamiokande, MACRO, MINOS, NUSEX, Soudan 2, Super-Kamiokande	$10^4$	$10^3$
Реактор(L) $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e$	CHOOZ, KamLAND, Palo Verde; (FA): Daya Bay, Double-CHOOZ; (FP): Braidwood, Diablo Canyon, KASKA, Kr2Det	$1..10^2$	$\sim 10^0$
Реактор(S) $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e$	Bugey, Gosgen, ILL, Krasnoyarsk, Rovno, Savannah River; (FP): RENO, Angra	$10^{-2..0}$	$\sim 10^0$
Ускоритель (L)	K2K $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, \nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , MINOS $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, \nu_\mu \rightarrow \nu_e$ ; (FA): ICARUS $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau, \nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , T2K $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, \nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , NOVA (NuMI Off-Axis) $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , OPERA $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ ; (FP) BNL Neutrino Working Group $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$	$\sim 10^2$	$10^3$
Ускоритель (S)	BEBC $\nu_\mu \rightarrow \nu_e, \nu_\mu \rightarrow \nu_\tau, \nu_e \rightarrow \nu_\tau, \nu_e \rightarrow \nu_e, \nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$ , BNL-E-776 $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , BNL-E-816 $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , CCFR $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, \nu_\mu \rightarrow \nu_e, \nu_e \rightarrow \nu_\tau, \nu_\mu \rightarrow \nu_\tau, \nu_e \rightarrow \nu_s$ , CDHSW $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, \nu_e \rightarrow \nu_e$ , CERN-PS-191 $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , CHARM $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, \nu_\mu \rightarrow \nu_e, \nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ , CHORUS $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau, \nu_e \rightarrow \nu_\tau$ , FNAL-E-0053 $\nu_\mu \rightarrow \nu_e, \nu_\mu \rightarrow \nu_\tau, \nu_e \rightarrow \nu_e$ , FNAL-E-0531 $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau, \nu_e \rightarrow \nu_\tau$ , FNAL-E-0613 $\nu_e \rightarrow \nu_e$ , Gargamelle $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e, \nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , IHEP-JINR $\nu_e \rightarrow \nu_e$ , KARMEN $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e, \nu_e \rightarrow \nu_e$ , LAMPF-0645 $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ , LAMPF-0764 $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , LSND $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e, \nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , MiniBooNE $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , NOMAD $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau, \nu_e \rightarrow \nu_\tau, \nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , NuTeV $\nu_\mu \rightarrow \nu_e, \bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ , SKAT $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, \nu_\mu \rightarrow \nu_e$ ; (FP): BooNE $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , MicroBooNE $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$	$\sim 10^{-1}$	$10^{3..4}$
Гео $\nu_e, \bar{\nu}_e$	KamLAND [19]	$1..10^2$	$\sim 10^0$
Астрофиз. источники	AMANDA, Baikal, GLUE, RICE; (FA): ANITA, ANTARES, IceCube, NEMO, NESTOR	$10^{10..20}$	$10^4$
Сверхновые	AMANDA, Baksan SN1987A, BOREXino, IMB SN1987A, Kamiokande SN1987A, KamLAND, LSD SN1987A, LVD, SNO, Super-Kamiokande; (FA): CLEAN, ICARUS, LAND, LANND, OMNIS, UNO	$10^{16}$	$\sim 10$
Реликтовые нейтрино	—	$10^{26}$	$\approx m_\nu$

## 1.1 Солнечные нейтрино

Полное число нейтрино (электронные нейтрино) от Солнца составляет примерно  $1,8 \cdot 10^{39} \nu/s$ . Главная модель, описывающая ядерные реакции в Солнце, — стандартная модель Солнца (SSM — "standard solar model"), разработанная Дж. Бакалом (John N. Bahcall) [15, 20, 21]. Основные реакции в Солнце, в которых рождаются нейтрино, и полные потоки приведены в таблице 2. Протоны превращаются в  $\alpha$ -частицы, позитроны и нейтрино с высвобождением примерно 25 MeV тепловой энергии на каждые четыре "сожженных" протона:

$$4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e + \underbrace{25\text{MeV}}_{\gamma} \quad (1.5)$$

Превращение четырех протонов в  $\alpha$ -частицу называется окончанием цепочки экзотермических реакций, составляющих ядерный синтез. Тепловая энергия, поддерживаемая ядерным синтезом, в итоге уходит с поверхности Солнца в виде солнечного света. На Рис. 2 и в табл. 2 приведены значения потока, энергии нейтрино от Солнца, и принятые обозначения реакций в стандартной модели Солнца.

Таблица 2: Полный поток солнечных нейтрино в стандартной солнечной модели, [22].

Реакция	Обозначение	Поток, $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$
$pp \rightarrow {}^2\text{H } e^+ \nu_e$	pp	$5.99(1.00 \pm 0.01) \cdot 10^{10}$
$pe^- p \rightarrow {}^2\text{H } \nu_e$	pep	$1.42(1.00 \pm 0.02) \cdot 10^8$
${}^3\text{He } p \rightarrow {}^4\text{He } e^+ \nu_e$	hep	$7.93(1.00 \pm 0.16) \cdot 10^3$
${}^7\text{Be } e^- \rightarrow {}^7\text{Li } \nu_e + (\gamma)$	${}^7\text{Be}$	$4.84(1.00 \pm 0.11) \cdot 10^9$
${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be}^* e^+ \nu_e$	${}^8\text{B}$	$5.69(1.00 \pm 0.16) \cdot 10^6$
${}^{13}\text{N} \rightarrow {}^{13}\text{C } e^+ \nu_e$	${}^{13}\text{N}$	$3.07(1.00_{-0.28}^{+0.31}) \cdot 10^8$
${}^{15}\text{O} \rightarrow {}^{15}\text{N } e^+ \nu_e$	${}^{15}\text{O}$	$2.33(1.00_{-0.29}^{+0.33}) \cdot 10^8$
${}^{17}\text{F} \rightarrow {}^{17}\text{O } e^+ \nu_e$	${}^{17}\text{F}$	$5.84(1.00 \pm 0.52) \cdot 10^6$

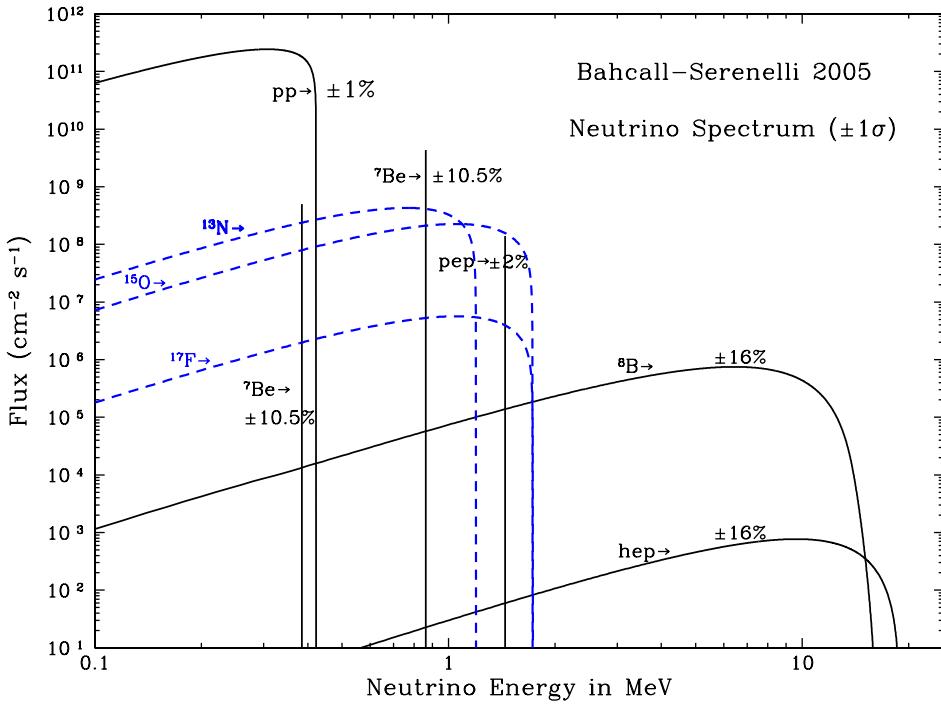


Рис. 2: Спектр солнечных нейтрино в модели [20], [21]

Изучение нейтрино от Солнца необходимо для понимания структуры и эволюции звезд. Первый в своем роде эксперимент Р. Дэвиса (Raymond Davis) по детектированию солнечных нейтрино используя реакцию  $\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow e^- + {}^{37}\text{Ar}$ , предложенную Б. Понтекорво, был начат в 1960-х годах и продолжался до 1990-х годов в шахте Homestake (США). Сразу же было замечено, что измеренный поток солнечных нейтрино меньше предсказанного. Это обстоятельство получило название "Загадка солнечных нейтрино". Как одно из решений этой "загадки" была выдвинута гипотеза о превращении электронных нейтрино в другой

типа на пути от Солнца к Земле, это явление было названо нейтринными осцилляциями. На Рис. 3 приведены значения потока солнечных нейтрино, измеренные в семи различных экспериментах и предсказанные ССМ, только эксперимент SNO решил "загадку солнечных нейтрино" в 2001 году, поскольку наряду с электронными нейтрино эксперимент мог регистрировать все типы нейтрино. Это окончательно подтвердило гипотезу о нейтринных осцилляциях и результаты ССМ.

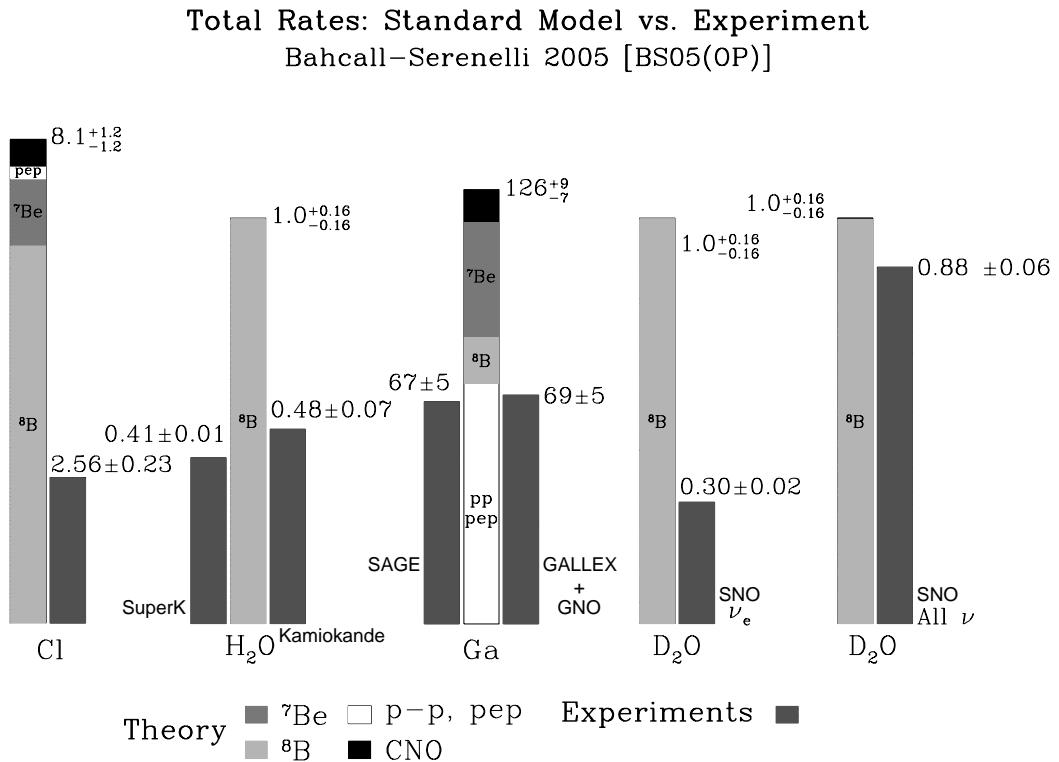


Рис. 3: Теоретические и экспериментальные значения потока солнечных нейтрино для экспериментов Homestake (Cl-Ar), Kamiokande, SK ( $\text{H}_2\text{O}$ ), SAGE, GALLEX/GNO (Ga-Ge), SNO ( $\text{D}_2\text{O}$ ), [21]. Значения потока приведены в SNU (Solar Neutrino Unit,  $10^{-36}$  захватов на атом в секунду).

## 1.2 Атмосферные нейтрино

Космические лучи состоят в основном из протонов и небольшой примеси легких ядер и электронов. За счет магнитного поля Земли частицы от Солнца и других удаленных источников с небольшими энергиями не могут достигать поверхности Земли. Космические лучи с энергиами порядка одного гигаэлектрон-вольта GeV до нескольких десятков TeV, попадая в атмосферу Земли, взаимодействуют с ядрами атомов вещества атмосферы, в результате чего образуются мезоны  $\pi^\pm, K^\pm, K^0, \dots$  с конечным временем жизни.

$$A_{cr} + A_{air} \rightarrow \pi^\pm, K^\pm, K^0, \dots \quad (1.6)$$

Распады пиона и мюона (на который распадается пион) являются доминирующими источником атмосферных нейтрино (электронные и мюонные нейтрино-антинейтрино) :

$$\begin{aligned}
\pi^\pm \rightarrow & \mu^\pm + \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu)_\mu \\
\downarrow & \\
\mu^\pm \rightarrow & e^\pm + \nu_e (\bar{\nu}_e)_e + \bar{\nu}_\mu (\nu_\mu)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

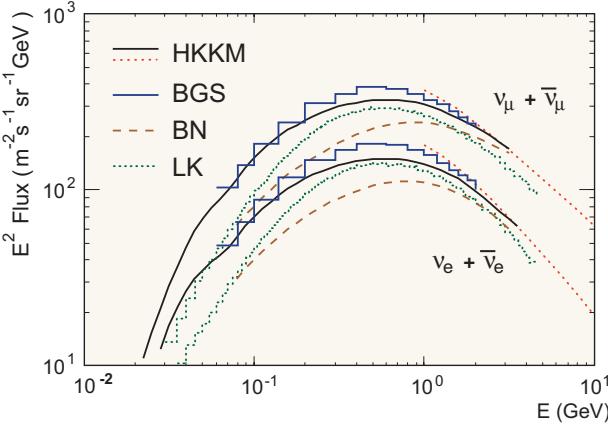


Рис. 4: Поток атмосферных нейтрино в различных моделях, [24].

На Рис. 4 приведены значения потока атмосферных нейтрино в различных моделях в зависимости от энергии нейтрино. На Рис. 5 показаны отношения значений отношений потока атмосферных ( $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ ) к потоку ( $\nu_e + \bar{\nu}_e$ ), измеренные в различных экспериментах к моделированному значению. Получившееся несоответствие в четырех экспериментах (Kamiokande, IMB, Soudan, SK) получило название "аномалия атмосферных нейтрино" [23].

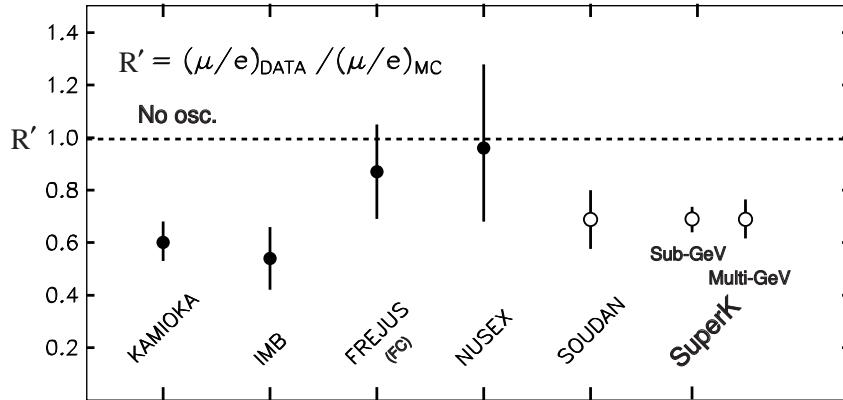


Рис. 5: Отношения предсказываемых моделируемых потоков атмосферных нейтрино к наблюдаемым в различных экспериментах, [25].

### 1.3 Ускорительные нейтрино

Протоны (антипротоны) из ускорителя сбрасываются на мишень, в результате чего образуются короткоживущие мезоны, в основном пионы, которые распадаются на мюон и мюонное нейтрино. Эксперименты с ускорительными нейтрино (см. табл. 1) играют важнейшую роль в физике нейтрино, поскольку известен начальный поток нейтрино, который рассчитывается из потоков мезонов и мюонов в ближнем детекторе. Также возможно изучение сечения рассеяния нейтрино на нуклоне с помощью ускорительных нейтрино, Рис. 6.

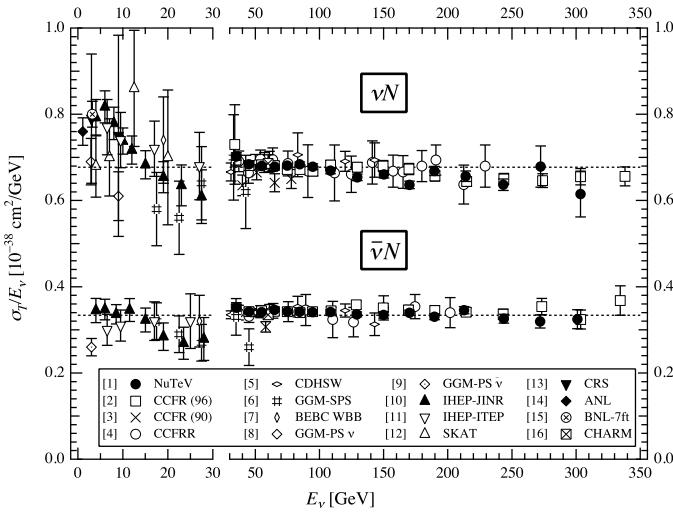


Рис. 6: Полное сечение рассеяния нейтрино высоких энергий на нуклоне, [18].

#### 1.4 Реакторные нейтрино

Ядерный реактор является мощным изотропным источником электронных антинейтрино. Более 99,9 % нейтрино от реактора образуются в результате деления ядер  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$ ,  $^{241}\text{Pu}$ , примерно 90 % — в результате деления  $^{235}\text{U}$  и  $^{239}\text{Pu}$ . К примеру реакция деления  $^{235}\text{U}$  имеет вид:



в большинстве случаев  $X_1 = ^{94}_{40}\text{Zr}$ ,  $X_2 = ^{140}_{58}\text{Ce}$ . Вместе ядра продукта деления  $^{94}_{40}\text{Zr}$ ,  $^{140}_{58}\text{Ce}$  имеют 98 протонов и 136 нейтронов, тогда как в  $(^{235}_{92}\text{U} + n)$  92 протона и 144 нейтрана, поэтому в среднем на одно деление ядра урана или плутония приходится  $(98 - 92) = 6$  процессов  $\beta$ -распада, 3 распада на каждое ядро  $X_1$  и  $X_2$ , в результате этих последовательных  $\beta$ -распадов продуктов деления образуется 6 электронных антинейтрино и выделяется примерно 200 MeV тепловой энергии. В среднем происходит  $10^{20}$  делений в секунду в ядерном реакторе мощностью  $3 \cdot 10^9$  ватт, а значит, реактор такой мощности является источником  $6 \cdot 10^{20}$  нейтрино в секунду. В процессе одного цикла работы ядерного реактора (примерно 400–500 дней<sup>4</sup>) происходит увеличение числа ядер  $^{239}\text{Pu}$  (накапливается  $\sim 250$  килограммов плутония, или  $\sim 100\%$  его количества в начале рабочего цикла) и уменьшения числа ядер  $^{235}\text{U}$ , в результате этого поток и спектр нейтрино изменяется на уровне  $\sim 5 - 10\%$  относительно значений в начале цикла.

На Рис. 7 показан спектр реакторных нейтрино для четырех наиболее расщепляющихся изотопов  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$ ,  $^{241}\text{Pu}$ . Впервые недостаток электронных антинейтрино от реактора (реакторов) был измерен в эксперименте KamLAND, Рис. 8. Результат эксперимента KamLAND интерпретируется как осцилляции электронных антинейтрино в мюонные и тау-лептонные.

<sup>4</sup>Затем следует остановка, чистка и перезаправка ядерным топливом реактора в течении  $\sim 20 - 40$  дней; большинство атомных электростанций состоят из не менее двух реакторов.

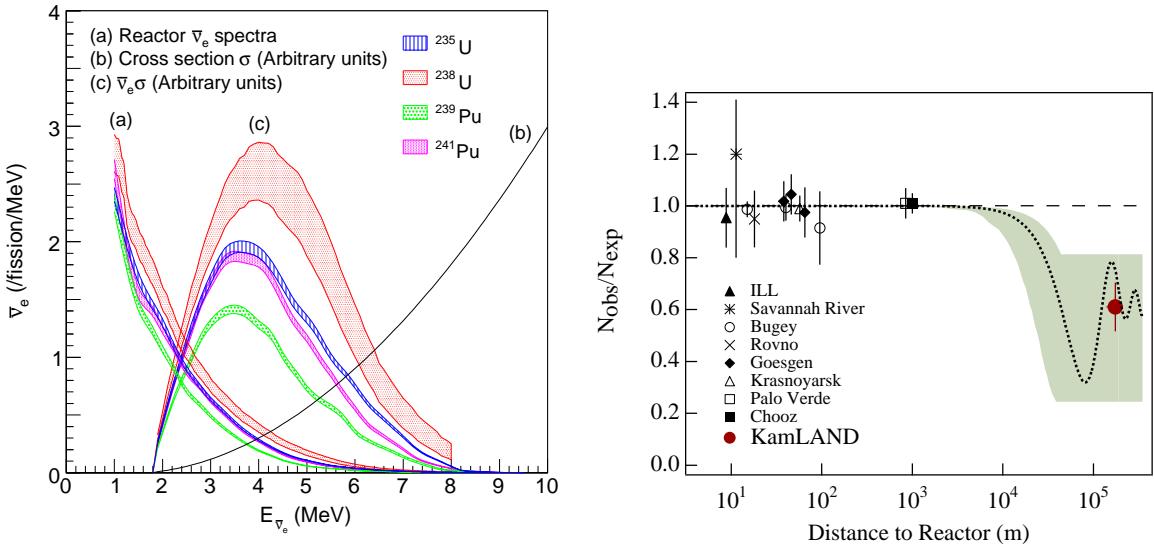


Рис. 7: (а) — Рассчитанный [26, 27] энергетический спектр реакторных  $\bar{\nu}_e$  в эксперименте KamLAND для четырех наиболее расщепляющихся изотопов  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$ ,  $^{241}\text{Pu}$  (закрашенная область показывает неопределенность в спектре). (б) — Сечение рассеяния нейтрино в реакции обратного  $\beta$ -распада. (с) — Наблюдаемый спектр  $\bar{\nu}_e$  без осцилляций нейтрино для каждого из изотопов; — произведение кривых (а) и (б).

Рис. 8: Отношение измеренного потока реакторных электронных антинейтрино  $\bar{\nu}_e$  к предсказанному в различных экспериментах [28], [29] в зависимости от расстояния, прямая  $N_{\text{obs}}/N_{\text{exp}} = 1$  — расчет без учета нейтриноосцилляций. Размер точки “KamLAND” соответствует усредненному расстоянию от всех 53 реакторов Японии. Закрашенная область — это расчеты, предсказанные моделью с нейтриноосцилляциями; прерывистая кривая — расчет с солнечными параметрами нейтриноосцилляций:  $\sin^2 2\theta = 0.833$  и  $\Delta m^2 = 5.5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$  [30].

## 1.5 Другие источники

### Нейтрино от Сверхновых

Согласно существующим моделям эволюции звезд [31], в результате гравитационного коллапса звезды более 90% всей образовавшейся энергии уносится нейтрино (всех типов  $\nu_e$ ,  $\bar{\nu}_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\bar{\nu}_\mu$ ,  $\nu_\tau$ ,  $\bar{\nu}_\tau$ ) с энергиями 10–20 MeV. Впервые и единственный раз нейтрино от Сверхновой, которая взорвалась в соседней с нашей галактике Большом Магеллановом Облаке, находящейся на расстоянии 50 килопарсек, были зарегистрированы в 1987 году четырьмя детекторами LSD, БПСТ, Kamiokande-II, IMB.

### Реликтовые нейтрино

В модели Большого Взрыва, наряду с реликтовыми фотонами, которые были экспериментально обнаружены, должны существовать реликтовые нейтрино с температурой 1,95 K, [32], [33]. В настоящей работе в разделе 4 затрагивается проблема обнаружения реликтовых нейтрино.

### Гео нейтрино

Гео-нейтрино — нейтрино, образовавшиеся вследствие радиоактивных распадов ядер (в основном урана  $^{235}\text{U}$ ) в недрах Земли. Средняя энергия гео-нейтрино равна примерно

нескольким мегаэлектрон-вольтам. Изучение гео-нейтрино возможно в эксперименте KamLAND, [19].

## 2 Нейтринные осцилляции в квантовой механике

Рассмотрим стандартный подход к нейтринным осцилляциям, основанный на нерелятивистской квантовой механике.

### 2.1 Двухнейтринные осцилляции

Рассмотрим состояние нейтрино  $|\nu_\alpha(t)\rangle$  с определенным флэйвором  $\alpha = e, \mu, \tau$ . Разложим  $|\nu_\alpha(t)\rangle$  по базису состояний  $|\nu_i(t)\rangle$  с определенной массой, удовлетворяющих уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\nu_i(t)\rangle = H_i |\nu_i(t)\rangle, \quad |\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_i V_{\alpha i} |\nu_i(t)\rangle \quad (2.1)$$

$H_i$  — гамильтониан массивного нейтрино с индексом<sup>5</sup>  $i = 1, 2, 3$ . Будем обозначать флаэйворные индексы греческими буквами, массивные индексы — латинскими.

Состояния  $|\nu_\alpha(t)\rangle$  не удовлетворяют уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_i V_{\alpha i} \left( \frac{\partial}{\partial t} |\nu_i(t)\rangle \right) = \sum_i V_{\alpha i} H_i |\nu_i(t)\rangle = \sum_i V_{\alpha i} H_i \sum_\beta V_{i\beta}^{-1} |\nu_\beta(t)\rangle \quad (2.2)$$

Если гамильтониан  $H_i$  не зависит от времени, то можно записать

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H_i t} |\nu_i(0)\rangle, \quad (2.3)$$

Будем обозначать здесь  $|\nu_i(0)\rangle \rightarrow |\nu_i\rangle$ . Стационарное уравнение Шредингера

$$H_i |\nu_i\rangle = E_i |\nu_i\rangle \quad (2.4)$$

Тогда  $|\nu_i(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H_i t} |\nu_i\rangle$ , и используя разложение (2.1), получим

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_i V_{\alpha i} e^{-\frac{i}{\hbar} H_i t} |\nu_i\rangle \quad (2.5)$$

Рассмотрим случай двухнейтринных осцилляций ( $\alpha = e, \mu; e, \tau; \mu, \tau; i = 1, 2$ ). Тогда матрица смешивания  $V$  может быть записана в следующем виде

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$\theta$  — угол смешивания.

$$\begin{cases} |\nu_e(t)\rangle = \cos \theta |\nu_1(t)\rangle + \sin \theta |\nu_2(t)\rangle \\ |\nu_\mu(t)\rangle = -\sin \theta |\nu_1(t)\rangle + \cos \theta |\nu_2(t)\rangle \end{cases} \quad (2.7)$$

Амплитуда перехода  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$

$$\begin{aligned} A_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = \langle \nu_\mu(t) | \nu_e \rangle &= (-\langle \nu_1 | \sin \theta e^{-iE_1 t} + \langle \nu_2 | \cos \theta e^{-iE_2 t}) (\cos \theta |\nu_1\rangle + \sin \theta |\nu_2\rangle) = \\ &= \cos \theta \sin \theta (-e^{-iE_1 t} + e^{-iE_2 t}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

---

<sup>5</sup>индекс  $i$  может принимать другие значения, отличные от 1, 2, 3, такие нейтрино называются стерильными

Состояния  $|\nu_i(t)\rangle$  ортонормированы  $\langle\nu_i|\nu_j\rangle = \delta_{ij}$ . Вероятность перехода  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} &= |A_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}|^2 = \cos^2 \theta \sin^2 \theta (-e^{-iE_1 t} + e^{-iE_2 t})(-e^{iE_1 t} + e^{iE_2 t}) = \\ &= \frac{1}{4} \sin^2 2\theta (2 - e^{-i(E_1 - E_2)t} - e^{-i(E_2 - E_1)t}) = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta (2 - 2 \cos(E_2 - E_1)t) = \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left(1 - \left(2 \cos \frac{(E_2 - E_1)t}{2} - 1\right)\right) \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{(E_2 - E_1)t}{2} \quad (2.10)$$

Ультраквантитативистский предел<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} E_i &\approx p_i + \frac{m_i^2}{2p_i}, & E_2 - E_1 &= \frac{1}{2p}(m_2^2 - m_1^2) = \frac{\Delta m_{21}^2}{2p} \\ L &\approx ct, & p_1 &\approx p_2 = p \approx E c^{-1} \end{aligned}$$

Тогда вероятность  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}$  запишется в виде

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \quad (2.11)$$

Эта формула (2.11) для вероятности двух нейтринных осцилляций, полученная из квантовомеханической картины, совпадает с формулой из работ [34], [36], которая там выводится из квантовой теории поля, и не совпадает с  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}$  из работы [37], где также используется квантовомеханический подход.

В формуле (2.11) величина  $\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}$  записана в системе единиц  $\hbar = c = 1$ , в этой системе длина имеет размерность  $\text{MeV}^{-1}$ , несложно перейти в систему единиц, в которой энергия измеряется в электрон-вольтах, а длина в метрах, используя известные значения постоянной Планка  $\hbar = 6,58 \cdot 10^{-22} \text{ MeV s}$  и скорости света  $c = 2,99 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ,

$$\frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E} \rightarrow \hbar^{-1} c^3 \frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E} \approx 1.27 \left(\frac{\Delta m_{12}^2 c^4}{\text{eV}^2}\right) \left(\frac{\text{MeV}}{E}\right) \left(\frac{L}{\text{km}}\right) \quad (2.12)$$

Введем понятие длины осцилляций

$$L_{osc} = \frac{4\pi E}{\Delta m_{12}^2} \quad (2.13)$$

Тогда формула (2.11) принимает вид

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\pi L}{L_{osc}} \quad (2.14)$$

При нахождении детектора на расстоянии  $L$  от источника равному целому числу длин осцилляций  $n \cdot L_{osc}$  вероятность перехода  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = 0$ . При  $L = n \cdot L_{osc}/2$  вероятность перехода  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = \sin^2 2\theta$  (в двухнейтринном рассмотрении). На Рис. 9 представлены графики вероятности перехода одного сорта нейтрино в другой и вероятности выживания отдельного сорта нейтрино, которая равна  $1 - P_{osc}$ . Использовано значение  $\sin^2 2\theta_{12} = 0.86^{+0.03}_{-0.04}$ , которое соответствует сегодняшним экспериментальным данным по нейтринным осцилляциям [18].

---

<sup>6</sup>используется система единиц  $\hbar = c = 1$

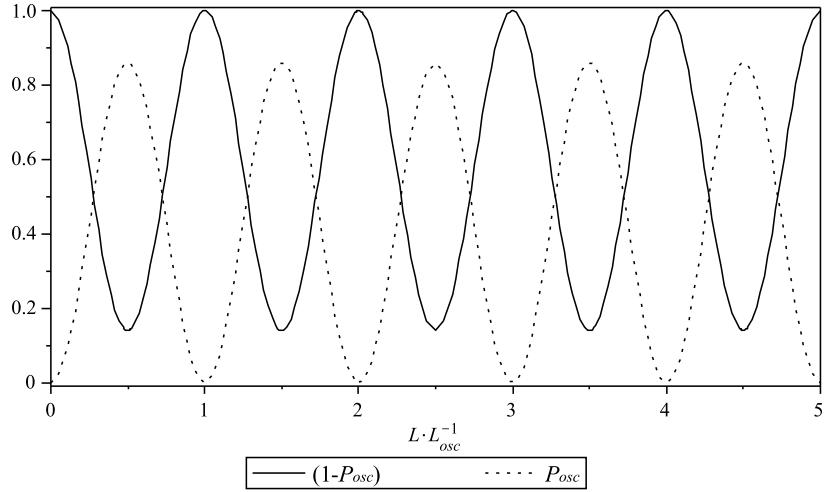


Рис. 9: Вероятность перехода  $P_{osc}$  нейтрино из одного сорта в другой — пунктирная линия, и вероятность выживания нейтрино отдельного сорта  $1 - P_{osc}$ , согласно формуле (2.11) при  $\sin^2 2\theta_{12} = 0.86$ .

## 2.2 Трёхнейтринные осцилляции

Параметризация матрицы смешивания (2.1) аналогична стандартной параметризации матрицы СКМ (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa)

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & c_{13}s_{12} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -c_{23}s_{12} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - c_{23}s_{13}s_{12}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ ,  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ , с 4 параметрами — 3 угла  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{13}$ ,  $\theta_{23}$  и фаза  $\delta$ , которая нарушает СР-четность. Матрица СКМ смешивает кварки  $d$ ,  $s$ ,  $b$  из разных поколений, матрица (2.15), которая смешивает лептоны  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$ , называется матрицей PMNS (Pontecorvo, Maki, Nakagawa, Sakata).

$$\text{кварки: } \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}, \quad \text{лептоны: } \begin{pmatrix} e \\ \nu_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_3 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Используя разложение (2.1), найдем формулы для амплитуды и для вероятности перехода нейтрино из одного типа в другой.

$$\begin{aligned} A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} &= \langle \nu_\beta(t) | \nu_\alpha \rangle = \\ &= (\langle \nu_1 | V_{\beta 1} e^{-iE_1 t} + \langle \nu_2 | V_{\beta 2} e^{-iE_2 t} + \langle \nu_3 | V_{\beta 3} e^{-iE_3 t}) (V_{\alpha 1} |\nu_1\rangle + V_{\alpha 2} |\nu_2\rangle + V_{\alpha 3} |\nu_3\rangle) = \\ &= V_{\alpha 1} V_{\beta 1} e^{-iE_1 t} + V_{\alpha 2} V_{\beta 2} e^{-iE_2 t} + V_{\alpha 3} V_{\beta 3} e^{-iE_3 t} = \sum_i e^{-iE_i t} V_{\alpha i} V_{\beta i} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sum_i e^{-iE_i t} V_{\alpha i} V_{\beta i} \quad (2.18)$$

Вероятность перехода  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} &= |A_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}|^2 = \sum_i e^{-iE_i t} V_{\alpha i} V_{\beta i} \sum_j e^{iE_j t} V_{\alpha j}^* V_{\beta j}^* = \\ &= \sum_i |V_{\alpha i}|^2 |V_{\beta i}|^2 + 2\operatorname{Re} \left[ \sum_{i>j} e^{-i(E_j - E_i)t} V_{\alpha j} V_{\beta j} V_{\alpha i}^* V_{\beta i}^* \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Если СР не нарушается, то  $\delta = 0$ , и матрица (2.15) вещественная. Тогда можно переписать выражение для  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}$ :

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sum_i V_{\alpha i}^2 V_{\beta i}^2 + 2 \sum_{i>j} V_{\alpha i} V_{\beta j} V_{\alpha i} V_{\beta i} \cos(E_j - E_i) t \quad (2.20)$$

Из условия унитарности матрицы смешивания:  $VV^\dagger = I$ ,  $\sum V_{\alpha i} V_{\beta i}^* = \delta_{\alpha\beta}$ , где введено обозначение  $V_{\alpha i} = V_{i\alpha}$ , можно показать справедливость следующей формулы:

$$\sum_i |V_{\alpha i}|^2 |V_{\beta i}|^2 + 2\text{Re} \left[ \sum_{i>j} V_{\alpha i} V_{\beta j} V_{\alpha i}^* V_{\beta i}^* \right] = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.21)$$

После несложных алгебраических преобразований и использования формулы (2.21) получаем

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \delta_{\alpha\beta} - 2 \sum_{i>j} V_{\alpha i} V_{\beta j} V_{\alpha i} V_{\beta i} (1 - \cos(E_i - E_j) t) \quad (2.22)$$

$$\boxed{P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} V_{\alpha i} V_{\alpha j} V_{\beta i} V_{\beta j} \sin^2 \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E}} \quad (2.23)$$

Уравнение (2.23) является формулой вероятности перехода нейтрино  $\nu_\alpha$  в нейтрино  $\nu_\beta$ .

### 2.3 Переход от трех-компонентной нейтринной формулы к двух-компонентной

Матрицу MNSP удобно записать как произведение трех матриц

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & e^{i\delta} s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ e^{-i\delta} s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Сейчас известно, что  $\theta_{13} \approx 0$ , поэтому<sup>7</sup> в этом приближении

$$V = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12}c_{23} & c_{12}c_{23} & s_{23} \\ s_{12}s_{23} & -c_{12}s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Видно, что  $V_{e1} = 0$ , поэтому особенно простые формулы получаются для переходов  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$ . Подставив элементы матрицы (2.25) в формулу (2.23), после некоторых преобразований, получим

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = c_{23}^2 \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E} \quad (2.26)$$

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\tau} = s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E} \quad (2.27)$$

Формула для выживания  $\nu_e$  в приближении  $\theta_{13} = 0$ :

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = 1 - P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} - P_{\nu_e \rightarrow \nu_\tau} = 1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E} \quad (2.28)$$

Если рассматривать такие<sup>8</sup> значения отношения  $L/E$ , что:  $\frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E} \ll 1$ , то формула для вероятности перехода  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$  принимает вид

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau} = \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \frac{\Delta m_{23}^2 L}{4E} \quad (2.29)$$

<sup>7</sup>если  $\theta_{13} = 0$ , то можно не делать предположения  $\delta = 0$ .

<sup>8</sup>Существует следующее соответствие между измеряемыми значениями  $\Delta m^2$  в экспериментах с солнечными и атмосферными нейтрино с  $\Delta m_{ij}^2$ :  $\Delta m_{12}^2 \Leftarrow \Delta m_\odot^2$ ,  $\Delta m_{23}^2 \Leftarrow \Delta m_{\text{atm}}^2$ , поэтому  $\frac{\Delta m_{12}^2 L}{\Delta m_{23}^2} \ll 1$ .

при этом формулы вероятности переходов и выживания электронного нейтрино  $\nu_e$ :

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} \approx P_{\nu_e \rightarrow \nu_\tau} \approx 0, \quad P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \approx 1 \quad (2.30)$$

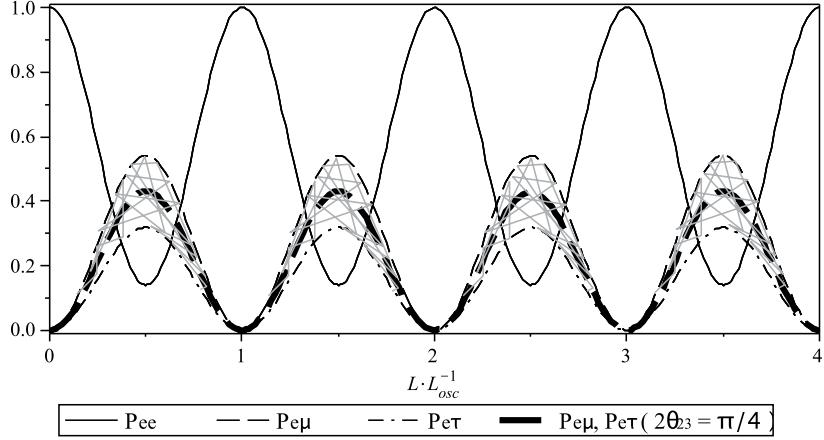


Рис. 10: Вероятности перехода  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}$ ,  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\tau}$ , определяемые по формулам (2.26), (2.27) — пунктирные линии (находятся в закрашенной области  $\sin^2 2\theta_{23} > 0.92$ ), и вероятность выживания электронного нейтрино  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$ , (2.28), значения углов смешивания следующие  $\sin^2 2\theta_{12} = 0.86^{+0.03}_{-0.04}$ ,  $\sin^2 2\theta_{23} > 0.92$ , [18]. Толстые линии — вероятности перехода  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}$ ,  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\tau}$  при  $\sin^2 2\theta_{23} = 1$ , т.е.  $\sin^2 \theta_{23} = \frac{1}{2}$ .

Флэйворное нейтрино не является связанным состоянием массивных нейтрино, а является только их суперпозицией, поэтому массивные нейтрино являются также фермионами как и флэйворные состояния.

## 2.4 Нейтринные осцилляции в веществе, MSW-эффект

Определим следующее состояние во флэйворном базисе нейтрино

$$\Psi_{(f)} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = V_{PMNS} \Psi_{(m)}, \quad \Psi_{(m)} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

индекс  $(f)$  означает флэйворный базис, индекс  $(m)$  — массивный. Условие нормировки:  $\int d\mathbf{x} |\nu_i|^2 = 1$ . Запишем уравнение Шредингера на состояние  $\Psi_{(f)}$

$$i \begin{pmatrix} \dot{\nu}_e \\ \dot{\nu}_\mu \\ \dot{\nu}_\tau \end{pmatrix} = \hat{E} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} + \hat{W} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

$$V^+ \hat{E} V = \text{diag}(E_1, E_2, E_3), \quad \hat{W} = \text{diag}(W, 0, 0) \quad (2.33)$$

Вид матрицы взаимодействия  $\hat{W}$  (2.33) означает, что мюонное и тау-лептонное антинейтрино не могут рассеяться на электроне за счет обмена заряженным  $W$ -бозоном.

$$\nu_e e \rightarrow \nu_e e \text{ (CC + NC)}, \quad \nu_\mu e \rightarrow \nu_\mu e \text{ (CC)}, \quad \nu_\tau e \rightarrow \nu_\tau e \text{ (CC)} \quad (2.34)$$

Система уравнений Шредингера на состояния  $\Psi_{(m)}$ :

$$i \begin{pmatrix} \dot{\nu}_1 \\ \dot{\nu}_2 \\ \dot{\nu}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & & \\ & E_2 & \\ & & E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} + V^+ \hat{W} V \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

$$T^+ \left( V^+ \hat{E} V + V^+ \hat{W} V \right) T = T^+ V^+ \left( \hat{E} + \hat{W} \right) V T = \text{diag}((H_M)_1, (H_M)_2, (H_M)_3) \quad (2.36)$$

$$iT^+ \dot{\Psi}_{(m)} = (H_M) T^+ \Psi_{(m)}, \quad i\dot{\Psi}_{(M)} = (H_M) \Psi_{(M)} \quad (2.37)$$

$$\Psi_{(M)} = T^+ \Psi_{(m)} = T^+ V^+ \Psi_{(f)}, \quad i\dot{\Psi}_{(M)} = (H_M) \Psi_{(M)} \quad (2.38)$$

В двух-нейтринном случае

$$\begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_m & -s_m \\ s_m & c_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 - Wc^2 & -Wcs \\ -Wcs & E_2 - Ws^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_m & s_m \\ -s_m & c_m \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

$$T^+ V^+ = (VT)^+ = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta_m) & -\sin(\theta + \theta_m) \\ \sin(\theta + \theta_m) & \cos(\theta + \theta_m) \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

$T, V = g(\theta_m), g(\theta) \in SO(2)$ ,  $g(\theta)g(\theta_m) = g(\theta + \theta_m) \in SO(2)$ .

Таким образом в формуле (2.14) следует сделать следующую замену переменных, чтобы получить вероятность двухнейтринных осцилляций в веществе,

$$L_{osc}^{-1} = \frac{1}{2\pi}(E_1 - E_2) \rightarrow L_m^{-1} = \frac{1}{2\pi}(H_1 - H_2) \quad (2.41)$$

$$\theta \rightarrow \theta + \theta_m \quad (2.42)$$

Вероятность двухнейтринных осцилляций (2.14) при наличии вещества принимает вид

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sin^2 2(\theta + \theta_m) \sin^2 \frac{\pi L}{L_m} \quad (2.43)$$

В отсутствии вещества  $\theta_m = 0, H_{1,2} = E_{1,2}$ , и формула (2.43) переходит в (2.14).  $H_1, H_2, \theta_m$  находятся из уравнения (2.39) :

$$s_m [(E_1 - Wc^2)c_m + (Wcs)s_m] + c_m [(-Wcs)c_m + (E_2 - Ws^2)(-s_m)] = 0 \quad (2.44)$$

$$H_1 = c_m [(E_1 - Wc^2)c_m + (Wcs)s_m] - s_m [(-Wcs)c_m + (E_2 - Ws^2)(-s_m)] \quad (2.45)$$

$$H_2 = s_m [(E_1 - Wc^2)s_m - (Wcs)c_m] + c_m [(-Wcs)s_m + (E_2 - Ws^2)c_m] \quad (2.46)$$

Из уравнения (2.44) находим:

$$\sin 2\theta_m ((E_1 - E_2) - W \cos 2\theta) = W \sin 2\theta \cos 2\theta_m \quad (2.47)$$

$$\sin^2 2\theta_m = \frac{W^2 \sin^2 2\theta}{(E_1 - E_2 - W \cos 2\theta)^2 + W^2 \sin^2 2\theta} = \frac{\sin^2 2\theta}{(l_\nu^{-1} l_0 - \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta} \quad (2.48)$$

$l_0 = 2\pi W^{-1} \propto \pi A/G_F N_A Z \rho$  задает масштаб<sup>9</sup>, на котором может стать существенным влияние материи [39].  $l_\nu$  — длина осцилляций в вакууме (2.13) :

$$l_\nu = 2\pi(E_1 - E_2)^{-1} = -4\pi \frac{E}{\Delta m_{12}^2} \quad (2.49)$$

---

<sup>9</sup>  $A$  — атомный номер,  $Z$  — зарядовое число,  $N_A$  — число Авогадро,  $\rho$  — плотность вещества.

Из уравнений (2.47), (2.48) находим (для вычисления вероятности (2.43))

$$\sin^2 2(\theta + \theta_m) = \frac{\sin^2 2\theta}{(l_\nu l_0^{-1})^2 - 2l_\nu l_0^{-1} \cos 2\theta + 1} = R \sin^2 2\theta \quad (2.50)$$

$$L_m = 2\pi(H_1 - H_2)^{-1} = \frac{l_\nu}{\sqrt{(l_\nu l_0^{-1})^2 - 2l_\nu l_0^{-1} \cos 2\theta + 1}} = l_\nu \sqrt{R} \quad (2.51)$$

Введено следующее обозначение — резонансный фактор  $R$ :

$$R = R(l_\nu l_0^{-1}, \cos \theta) = \frac{1}{(l_\nu l_0^{-1})^2 - 2l_\nu l_0^{-1} \cos 2\theta + 1} \quad (2.52)$$

Получим вероятность двухнейтринных осцилляций в веществе (2.43), подставив найденные значения (2.50) и (2.51),

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = R \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\pi L}{l_\nu \sqrt{R}} \quad (2.53)$$

Формула аналогичная (2.53) впервые была получена Михеевым и Смирновым в 1986 году [38, 39]. Резонансное поведение (2.52) вероятности нейтринных осцилляций при наличии вещества известно как MSW-эффект (Mikheev, Smirnov, Wolfenstein, [38, 40]). На Рис. 11 показаны два графика вероятности нейтринных осцилляций в веществе согласно формуле (2.53) при значениях  $\sin^2 2\theta = 0.01$  и  $0.45$ ,  $m = l_\nu / l_0$ ,  $v = L / l_\nu$ .

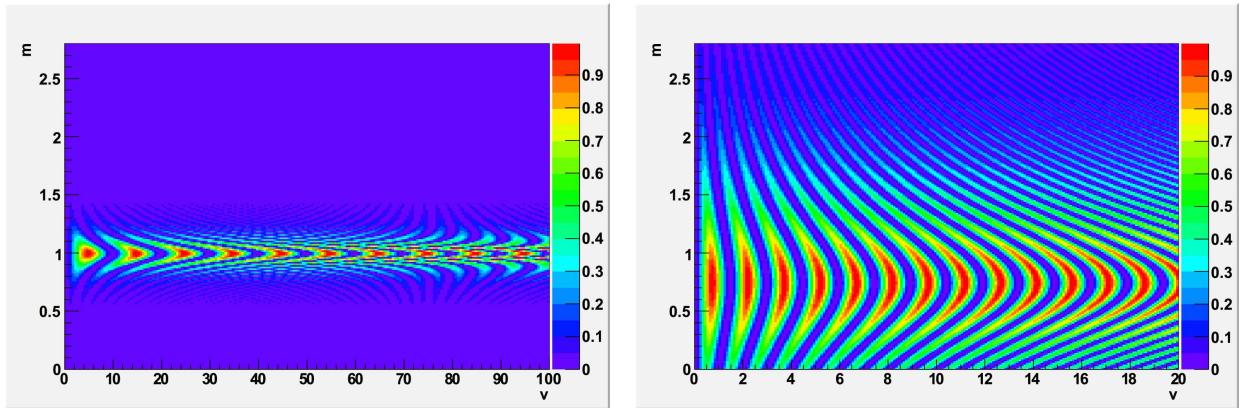


Рис. 11: Вероятность нейтринных осцилляций в веществе при значениях  $\sin^2 2\theta = 0.01$  — слева,  $\sin^2 2\theta = 0.45$  — справа.

## 2.5 Резюме

В данном разделе выведены известные формулы вероятности нейтринных осцилляций в вакууме и веществе в рамках нерелятивистской квантовой механики. Приведён переход от трёх-компонентной формулы к двух-компонентной. Построены графики вероятности осцилляций при экспериментально допустимых значениях углов смешивания. На построенных графиках (Рис. 11) показано резонансное усиление вероятности нейтринных осцилляций в веществе, известное как MSW-эффект.

### 3 Квантовая теория поля и нейтринные осцилляции

Приведем здесь общие сведения и определения в квантовой теории поля. Функция Лагранжа  $L(t)$  и плотность Лагранжа (лагранжиан)  $\mathcal{L}$ :

$$L(t) = \int d\mathbf{x} \mathcal{L}(\mathbf{x}, t), \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \quad (3.1)$$

$\mathcal{L}_0$  — лагранжиан свободных полей,  $\mathcal{L}_{int}$  — лагранжиан взаимодействия. Для вычисления вероятности процесса рассеяния необходимо знание S-матрицы; действие и S-матрица:

$$\mathcal{A} = \int dt L(t) = \int dx \mathcal{L}(x), \quad S = T e^{i\mathcal{A}_{int}} \quad (3.2)$$

$\mathcal{A}_{int}$  — действие взаимодействия,  $T$  — Т-упорядочивание

$$\mathcal{A}_{int} = \int dx \mathcal{L}_{int}(x), \quad T(\psi(x)\bar{\psi}(y)) = \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(y), & x^0 > y^0 \\ \pm\bar{\psi}(y)\psi(x), & x^0 < y^0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Знак + в формуле (3.3) выбирается, если поле  $\psi$  описывает бозоны; знак – для фермионных полей. Аксиоматическая S-матрица для плоских волн [41]–[48] имеет вид

$$S(p) - 1 = (2\pi)^4 \delta^4 \left( \sum_{in} p_i - \sum_{out} p_f \right) i\mathcal{M}(p), \quad (3.4)$$

где  $\{p_i\}$ ,  $\{p_f\}$  — наборы импульсов начальных и конечных частиц, матричный элемент  $\mathcal{M}$  может быть посчитан с помощью диаграмм Фейнмана. В общей интерпретации фейнмановских диаграмм под диаграммой можно понимать элементарное взаимодействие — элементарный процесс рассеяния, который происходит за бесконечно малое время (мгновенно) и в бесконечно малой пространственно области — точечное взаимодействие. Что следует делать, если необходимо рассмотреть процесс рассеяния на макро-уровне — конечное время и область локализации этого процесса? Существуют два способа или подхода (и оба они связаны с формализмом волновых пакетов, вытекающим из требования пространственно-временной локализации процесса):

- Нелокальная квантовая теория поля [49]. Изменение коммутационных соотношений для операторов рождения/уничтожения, волновые пакеты появляются с необходимости сразу в лагранжиане<sup>10</sup>. Позволяет рассматривать пространственные области — меньше комптоновской длины волны соответствующей частицы. Масштаб в этом подходе не является макроскопическим, но и не является бесконечно малым.
- Введение плотностей числа начальных и конечных частиц. В этом рассмотрении, поля в лагранжиане не содержат размазок и коммутационные соотношения операторов рождения/уничтожения являются каноническими. Волновые пакеты строятся как суперпозиция плоских волн и не содержат античастиц, это накладывает ограничение на область пространственной локализации волнового пакета — не меньше соответствующей комптоновской длины.

В настоящей работе рассматривается второй подход введения волновых пакетов и локализации процесса.

---

<sup>10</sup>Как следствие уравнений движения, волновые пакеты в этом подходе удовлетворяют уравнению Дирака.

### 3.1 Волновые пакеты

Поля в лагранжиане представимы через операторы рождения и уничтожения в импульсном пространстве:

$$\Psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2 E_{\mathbf{p}}}} \sum_s [a_{\mathbf{p}}^s e^{-ipx} u^s(\mathbf{p}) + b_{\mathbf{p}}^s e^{ipx} v^s(\mathbf{p})] \quad (3.5)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2 E_{\mathbf{p}}}} \sum_s [a_{\mathbf{p}}^s e^{ipx} u^{s+}(\mathbf{p}) + b_{\mathbf{p}}^s e^{-ipx} v^{s+}(\mathbf{p})] \quad (3.6)$$

Определим  $|\mathbf{p}\rangle$  как одночастичное состояние с определенным<sup>11</sup> 4-импульсом  $p$ ,

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2 E_{\mathbf{p}}} a_p^+ |0\rangle \quad (3.7)$$

Напишем соотношение, которое понадобится при вычислении амплитуды  $\langle \text{out}|(S-1)|\text{in}\rangle$ ; если поле  $\Psi^+(x)$  и состояние  $|\mathbf{p}\rangle$  относятся к одной и той же частице, то справедливо<sup>12</sup>:

$$\begin{aligned} \Psi^+(x)|\mathbf{p}\rangle &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2 E_{\mathbf{k}}}} a_{\mathbf{k}} e^{-ikx} v^+(\mathbf{k}) \sqrt{2 E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^+ |0\rangle = \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2 E_{\mathbf{k}}}} e^{-ikx} v^+(\mathbf{k}) \sqrt{2 E_{\mathbf{p}}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) |0\rangle \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\Psi^+(x)|\mathbf{p}\rangle = e^{-ipx} v^+(\mathbf{p}) |0\rangle \quad (3.9)$$

Построим одночастичное состояние как суперпозицию одночастичных состояний  $|\mathbf{k}\rangle$  (3.7) с определенными импульсами  $k$ , которое назовем *волновым пакетом*

$$|\varphi\rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2 E_k}} \varphi(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle \quad (3.10)$$

$\varphi(\mathbf{k})$  — Фурье-образ от пространственного поля. Состояния  $|\varphi\rangle$  не обладают определенной массой. Условие нормировки:

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |\varphi(\mathbf{k})|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \langle \varphi | \varphi \rangle = 1. \quad (3.11)$$

Вероятность перехода из начального состояния, описываемого 2-мя волновыми пакетами, в конечное состояние с несколькими волновыми пакетами:

$$\mathcal{P} = |\langle \varphi_1 \varphi_2 \dots | S - 1 | \varphi_A \varphi_B \rangle|^2 \quad (3.12)$$

В предположении коллиниарности волновых функций, появляется фактор  $\exp(-i\mathbf{b}\mathbf{k}_B)$  с прицельным параметром  $\mathbf{b}$ , тогда начальное состояние может быть записано в следующем виде [43]:

$$|\text{in}\rangle = |\varphi_A \varphi_B\rangle = \int \frac{d^3 k_A}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_B}{(2\pi)^3} \frac{\varphi_A(\mathbf{k}_A) \varphi_B(\mathbf{k}_B) e^{-i\mathbf{b}\mathbf{k}_B}}{\sqrt{2 E_A 2 E_B}} |\mathbf{k}_A \mathbf{k}_B\rangle \quad (3.13)$$

Конечное состояние

$$\langle \text{out}| = \langle \varphi_1 \varphi_2 \dots | = \left( \prod_f \int \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{\varphi_f(\mathbf{p}_f)}{\sqrt{2 E_f}} \right) \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots | \quad (3.14)$$

Начальное и конечное состояния являются прямыми произведениями одночастичных состояний, если измерения выполняются соответственно при  $t \rightarrow -\infty$  и  $t \rightarrow +\infty$ , [47].

---

<sup>11</sup>  $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$

<sup>12</sup>  $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{p}}^+]_{\pm} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p})$

### 3.2 Лагранжиан взаимодействия

Большой интерес вызывает процесс образования нейтрино в источнике и дальнейшее детектирование взаимодействия нейтрино в детекторе, который находится *вдалеке* от источника. Схематически это представлено на Рис. 12.

Частицы	источник	детектор
in	$\{a_s\}, \ell_\alpha$	$\{a_d\}$
out	$\{b_s\}$	$\{b_d\}, \ell_\beta$
переносчик	$W^\pm$	$W^\pm$
нейтрино	$\nu_\alpha$	$\nu_\beta$

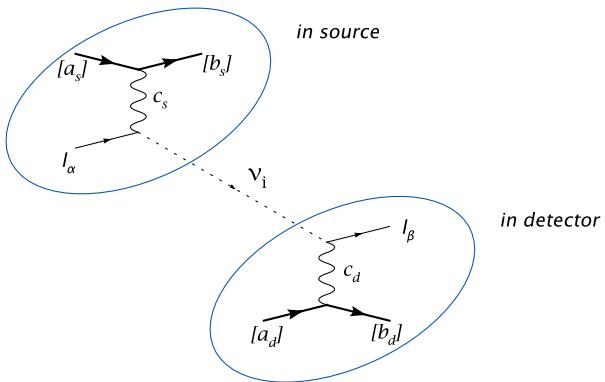


Рис. 12: Распространение нейтрино из источника в детектор.

$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$  Ферми был предложен эффективный гамильтониан взаимодействия [50], который может быть записан как структура взаимодействия ток-на-ток:

$$\mathcal{H}_{int} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{p} \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) n \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu, \quad \mathcal{H}_{int} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^\dagger J^\mu + \text{h.c.} \quad (3.16)$$

Фейнман и Гелл-Манн разработали концепцию слабого тока для  $\beta$ -распада:

$$J_\mu = J_\mu^\ell + J_\mu^h = \bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu + \bar{\psi}_n \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) \psi_p \quad (3.17)$$

$J_\mu^h$  — адронный ток,  $J_\mu^\ell$  — лептонный заряженный ток:

$$J_\mu^\ell = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{l}_\alpha \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_\alpha, \quad \text{где } \ell_\alpha = e, \mu, \tau, \nu_\alpha = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau. \quad (3.18)$$

Формально, чтобы более наглядно проследить возникновение пропагатора нейтрино, можно написать лагранжианы взаимодействия нейтрино в источнике и детекторе следующим образом:

$$\mathcal{L}_s = \bar{C}_s(x) \nu_\alpha(x) + \bar{\nu}_\alpha(x) C_s(x) \quad (3.19)$$

$$\mathcal{L}_d = \bar{C}_d(x) \nu_\beta(x) + \bar{\nu}_\beta(x) C_d(x) \quad (3.20)$$

<sup>13</sup>обычно, рассматривают 2 реакции: в источнике и в детекторе и считают амплитуды для каждого из процессов, нейтрино входит в источник в  $|out\rangle$  состояние, в детекторе — в  $|in\rangle$  состояние.

Например, для процесса, представленного на Рис. 12, формальный вид  $\bar{C}$  (вектор-строка в спинорном пространстве) следующий

$$\bar{C}_s(x) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^s(x) \bar{\ell}_\alpha(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \quad (3.21)$$

$$\bar{C}_d(x) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^d(x) \bar{\ell}_\beta(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \quad (3.22)$$

Построим состояния  $|in\rangle$  и  $|out\rangle$  как прямые произведения  $in$ - и  $out$ - состояний соответственно в источнике и детекторе :

$$|in\rangle = |in\ (\text{source})\rangle \otimes |in\ (\text{detector})\rangle \quad (3.23)$$

$$|out\rangle = |out\ (\text{source})\rangle \otimes |out\ (\text{detector})\rangle \quad (3.24)$$

Если одночастичные состояния описываются волновыми пакетами, то следует понимать под  $in$ - и  $out$ - состояниями следующие выражения:

$$|in\rangle = |\phi_1 \phi_2 \dots\rangle = \left( \prod_{i=1}^{N_{in}} \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 \sqrt{2 E_{\mathbf{k}_i}}} \phi_i(k_i) \right) |\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \dots\rangle \quad (3.25)$$

$$|out\rangle = |\varphi_1 \varphi_2 \dots\rangle = \left( \prod_{j=1}^{N_{out}} \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 \sqrt{2 E_{\mathbf{p}_j}}} \varphi_j(p_j) \right) |\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots\rangle \quad (3.26)$$

$|\mathbf{k}\rangle$  — одночастичное состояние с фиксированным импульсом на массовой поверхности  $k_0^2 - \mathbf{k}^2 = m^2$ . Частицы в  $|in\rangle$  состоянии :  $N_{in}$  — число частиц в  $|in\rangle$  состоянии;  $\phi_i(k_i)$  — характеризует волновой пакет  $i$ -ой частицы,  $k_i$  — импульс в разложении соответствующего волнового пакета. Частицы в  $|out\rangle$  состоянии :  $N_{out}$  — число частиц в  $|out\rangle$  состоянии;  $\varphi_j(p_j)$  — соответственно. Индекс у функций  $\phi_i(k_i)$  и  $\varphi_j(p_j)$ , а также разные буквенные обозначения:  $\phi$  и  $\varphi$  для волновых пакетов относящихся к  $|in\rangle$  и  $|out\rangle$  состояниям соответственно, означают, что волновые пакеты, относящиеся к разным частицам, имеют различный вид.

### 3.3 Нейтринные осцилляции в вакууме

#### 3.3.1 Амплитуда

Амплитуда перехода из  $|in\rangle$  в  $|out\rangle$  состояние

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\equiv \langle out | (S - 1) | in \rangle = \\ &= \left( \prod_{j=1}^{N_{out}} \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 \sqrt{2 E_{\mathbf{p}_j}}} \varphi_j(p_j) \right) \left( \prod_{i=1}^{N_{in}} \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 \sqrt{2 E_{\mathbf{k}_i}}} \phi_i(k_i) \right) \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots | (S - 1) | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \dots \rangle \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\text{in : } \phi_i(k_i) = \phi_i(k_i, \bar{\mathbf{k}}_i) = a(\mathbf{k}_i - \bar{\mathbf{k}}_i) e^{+ik_i x_{s,d}} \quad (3.28)$$

$$\text{out : } \varphi_j(p_j) = \varphi_j(p_j, \bar{\mathbf{p}}_j) = \tilde{a}(\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}_j) e^{-ip_j x_{s,d}}, \quad (3.29)$$

где  $x_{is} \approx x_s$ ,  $x_{jd} \equiv y_{jd} \approx y_d$ . Знак “-” в экспоненте пишется для  $out$  частиц; знак “+” для  $in$ .  $x_{s,d}$  — координата  $i$ -ой частицы в источнике ( $s$ ) или в детекторе ( $d$ ) в зависимости от того, где она участвует в взаимодействии в источнике или в детекторе.

$a_i$  ( $\tilde{a}_j$ ) — действительные функции, которые имеют острый максимум при  $\mathbf{k}_i = \bar{\mathbf{k}}_i$  ( $\mathbf{p}_j = \bar{\mathbf{p}}_j$ ).  $\bar{\mathbf{k}}_i$  ( $\bar{\mathbf{p}}_j$ ) — средний импульс, который имеет  $i$ -ую ( $j$ -ую) частицу. Переход к плоским волнам можно сделать, если положить  $a(\mathbf{k}_i - \bar{\mathbf{k}}_i) = \delta(\mathbf{k}_i - \bar{\mathbf{k}}_i)$ .

Все импульсы, которые образуют наборы  $\{k\}$  и  $\{p\}$ , относятся к полям из лагранжиана. Поля в лагранжиане неразмазанные, и при вычислении амплитуды будут возникать конструкции вида (3.9)

$$\Psi^+(x)|\mathbf{p}\rangle = e^{-i p x} v^+(\mathbf{p}) |0\rangle$$

Введем обозначение, которое будет содержать в себе объекты типа  $v^+(p)v^-(p)$ ,

$$\bar{C}_{s,d}^p = \bar{C}_{s,d}^p(\{k\}_{s,d}, \{p\}_{s,d}) \quad (3.30)$$

$$\langle \{p\}_s | C_s(x) | \{k\}_s \rangle \equiv \langle 0 | C_s^p(\{k\}_s, \{p\}_s) e^{i \{k\}_s x} e^{i \{p\}_s x} | 0 \rangle \quad (3.31)$$

индекс  $p$  у  $C^p$  означает зависимость от импульсов, а не от координат как у  $C$ .

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots | (S-1) | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \dots \rangle = \\ &= \int dx dy \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots | T [\bar{C}_s(x) \nu_\alpha(x) \bar{\nu}_\beta(y) C_d(y) + C_s(x) \bar{\nu}_\alpha(x) \nu_\beta(y) \bar{C}_d(y)] | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \dots \rangle = \\ &= \int dx dy \left[ \bar{C}_s^p e^{-i \{k_s\} x} e^{+i \{p_s\} x} \left( \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{S}_{\alpha\beta}(q) e^{iq(x-y)} \right) C_d^p e^{-i \{k_d\} y} e^{+i \{p_d\} y} + \right. \\ & \quad \left. + \tilde{C}_s^p e^{-i \{k_s\} y} e^{+i \{p_s\} y} \left( (-1) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{S}_{\beta\alpha}(q) e^{-iq(x-y)} \right) \bar{C}_d^p e^{-i \{k_d\} x} e^{+i \{p_d\} x} \right] \quad (3.32) \end{aligned}$$

Знак  $(-1)$  появляется при перестановке спиноров нейтрино.

$$\langle 0 | T [\nu_1(x) \bar{\nu}_1(y)] | 0 \rangle = (-1) \langle 0 | T [\bar{\nu}_1(y) \nu_1(x)] | 0 \rangle = i \int \frac{dq}{(4\pi)^4} \frac{\hat{q} + m_1}{q^2 - m_1^2} e^{+iq(x-y)} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [\nu_\alpha(x) \bar{\nu}_\beta(y)] | 0 \rangle &= \sum_i \sum_j V_{\alpha i} V_{\beta j}^* \delta_{ij} i \int \frac{dq}{(4\pi)^4} \frac{\hat{q} + m_i}{q^2 - m_i^2} e^{+iq(x-y)} = \\ &= i \int \frac{dq}{(4\pi)^4} \left( \sum_i V_{\alpha i} V_{\beta i}^* \frac{\hat{q} + m_i}{q^2 - m_i^2} \right) e^{+iq(x-y)} \equiv \left( i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{S}_{\alpha\beta}(q) e^{iq(x-y)} \right) \quad (3.34) \end{aligned}$$

$\tilde{S}_{\alpha\beta}$  — содержит три пропагатора нейтрино.

Рассмотрим первое слагаемое в формуле (3.32), относящееся к нейтрино (а не к  $\bar{\nu}$ ), подставляя (3.32) в формулу (3.27), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\nu &= \left( \prod_{j=1} \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 \sqrt{2 E_{\mathbf{p}_j}}} \varphi_j(p_j) \right) \left( \prod_{i=1} \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 \sqrt{2 E_{\mathbf{k}_i}}} \phi_i(k_i) \right) \cdot \\ & \quad \cdot \int dx dy \int \frac{dq}{(2\pi)^4} e^{-i \{k_s\} x} e^{+i \{p_s\} x} \left( e^{iq(x-y)} \right) e^{-i \{k_d\} y} e^{+i \{p_d\} y} \mathcal{M}_\nu(\{k\}, \{p\}; q) \quad (3.35) \end{aligned}$$

$\mathcal{M}_\nu(\{k\}, \{p\}; q)$  — матричный элемент,

$$\mathcal{M}_\nu(\{k\}, \{p\}; q) = \bar{C}_s^p \tilde{S}_{\alpha\beta}(q) C_d^p \quad (3.36)$$

Введем функции  $\Psi_i(\mathbf{x})$  являющиеся фурье-образами функций  $a_i(\mathbf{k}_i)$  (а не  $a_i(\mathbf{k}_i - \bar{\mathbf{k}}_i)$  как это сделано в работе [1]), следующим образом

$$\Psi_i(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} a_i(\mathbf{k}_i) e^{+i \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}} = \int \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} a_i(\mathbf{k}_i - \bar{\mathbf{k}}_i) e^{+i (\mathbf{k}_i - \bar{\mathbf{k}}_i) \cdot \mathbf{x}} \quad (3.37)$$

$$\tilde{\Psi}_j(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{p}_j}{(2\pi)^3} \tilde{a}_j(\mathbf{p}_j) e^{-i\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{x}} = \int \frac{d\mathbf{p}_j}{(2\pi)^3} \tilde{a}_j(\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}_j) e^{-i(\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}_j) \cdot \mathbf{x}} \quad (3.38)$$

Используя разложение (3.28), рассмотрим один интеграл из (3.35), например, относящийся к частице из состояния out (это означает, что переменной интегрирования является  $p_j$ ) из источника (это означает, что будет выбрана экспонента содержащая  $+ip_jx$ ),

$$\begin{aligned} & \left( \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 \sqrt{2 E_{\mathbf{p}_j}}} \tilde{a}(\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}_j) e^{-ip_j x_s} \right) e^{+ip_j x} \mathcal{M}_\nu(\dots p_j \dots) = \\ & = \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 \sqrt{2 E_{\mathbf{p}_j}}} \tilde{a}(\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}_j) e^{+i\mathbf{p}_j \cdot (\mathbf{x}_s - \mathbf{x})} e^{-iE_{\mathbf{p}_j}(t_s - t)} \mathcal{M}_\nu(\dots p_j \dots) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Разложим  $E_{\mathbf{p}_j}$ , в быстроменяющейся экспоненте  $e^{-iE_{\mathbf{p}_j}(t_s - t)}$ , в ряд вблизи  $\mathbf{p}_j = \bar{\mathbf{p}}_j$ , и ограничимся членом линейным по  $\mathbf{p}_j$

$$E_{\mathbf{p}_j} = E_{\bar{\mathbf{p}}_j} + \frac{\bar{\mathbf{p}}_j}{E_{\bar{\mathbf{p}}_j}} (\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}_j) + \dots \quad (3.40)$$

Групповая скорость  $j$ -го волнового пакета  $\bar{\mathbf{v}} = \frac{dE_{\mathbf{p}_j}}{d\mathbf{p}_j} \Big|_{\mathbf{p}_j=\bar{\mathbf{p}}_j} = \frac{\bar{\mathbf{p}}_j}{E_{\bar{\mathbf{p}}_j}}$ , тогда

$$\begin{aligned} p(x - x_s) &= p^0(x^0 - x_s^0) - \mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \approx \bar{p}^0(x^0 - x_s^0) + \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}})(x^0 - x_s^0) - \mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \equiv \\ &\equiv \bar{p}^0(x^0 - x_s^0) + \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}})(x^0 - x_s^0) - (\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) + (\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)) = \\ &= \bar{p}(x - x_s) + (\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}})(\bar{\mathbf{v}}(x^0 - x_s^0) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$e^{-ip_j(x_s - x)} = e^{+i\bar{p}_j(x - x_s)} e^{+i(\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}_j)(\bar{\mathbf{v}}_j(x^0 - x_s^0) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s))}. \quad (3.42)$$

Получим следующий результат:

$$\begin{aligned} & \left( \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 \sqrt{2 E_{\mathbf{p}_j}}} \tilde{a}(\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}_j) e^{-ip_j x_s} \right) e^{+ip_j x} \mathcal{M}_\nu(\dots p_j \dots) = \\ & = \left[ \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \tilde{a}(\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}_j) e^{-i(\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}_j)(-\bar{\mathbf{v}}_j(x^0 + x_s^0) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s))} \right] e^{-i\bar{p}_j(x_s - x)} \frac{1}{\sqrt{2 E_{\bar{\mathbf{p}}_j}}} \mathcal{M}_\nu(\dots p_j \dots) = \\ & = \left[ \tilde{\Psi}_j(-\bar{\mathbf{v}}_j(x^0 - x_s^0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)) \right] \frac{1}{\sqrt{2 E_{\bar{\mathbf{p}}_j}}} e^{-i\bar{p}_j(x_s - x)} \mathcal{M}_\nu(\dots \bar{p}_j \dots) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Амплитуда имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\nu &= \int dx dy \prod_{j=1}^{F_s} \tilde{\Psi}_j(-\bar{\mathbf{v}}_j(x^0 - x_s^0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)) \frac{1}{\sqrt{2 E_{\bar{\mathbf{p}}_j}}} e^{+i\bar{p}_j(x - x_s)}. \\ & \cdot \prod_{j=F-F_s}^F \tilde{\Psi}_j(-\bar{\mathbf{v}}_j(y^0 - y_d^0) + (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d)) \frac{1}{\sqrt{2 E_{\bar{\mathbf{p}}_j}}} e^{+i\bar{p}_j(y - y_d)} \cdot \prod_{i=1}^{I_s} \Psi_i(+\bar{\mathbf{v}}_i(x^0 - x_s^0) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)) \frac{1}{\sqrt{2 E_{\bar{\mathbf{k}}_i}}} e^{-i\bar{k}_i(x - x_s)}. \\ & \cdot \prod_{i=I-I_s}^I \Psi_i(+\bar{\mathbf{v}}_i(y^0 - y_d^0) - (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d)) \frac{1}{\sqrt{2 E_{\bar{\mathbf{k}}_i}}} e^{-i\bar{k}_i(y - y_d)} \cdot \int \frac{dq}{(2\pi)^4} e^{iq(x-y)} \mathcal{M}_\nu(\{\bar{k}\}, \{\bar{p}\}; q) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Введем обозначения

$$\Psi_s = \prod_{j=1}^{F_s} \frac{\tilde{\Psi}_j(0)}{\sqrt{2 E_{\bar{\mathbf{p}}_j}}} \prod_{i=1}^{I_s} \frac{\Psi_i(0)}{\sqrt{2 E_{\bar{\mathbf{k}}_i}}}, \quad \Psi_d = \prod_{j=F-F_s}^F \frac{\tilde{\Psi}_j(0)}{\sqrt{2 E_{\bar{\mathbf{p}}_j}}} \prod_{i=I-I_s}^I \frac{\Psi_i(0)}{\sqrt{2 E_{\bar{\mathbf{k}}_i}}} \quad (3.45)$$

$$E_s(x - x_s) = \prod_{j=1}^{F_s} \frac{\tilde{\Psi}_j(-\bar{\mathbf{v}}_j(x^0 - x_s^0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s))}{\tilde{\Psi}_j(0)} \prod_{i=1}^{I_s} \frac{\Psi_i(+\bar{\mathbf{v}}_i(x^0 - x_s^0) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s))}{\Psi_i(0)} \quad (3.46)$$

$$E_d(y - y_d) = \prod_{j=F-F_s}^F \frac{\tilde{\Psi}_j(-\bar{\mathbf{v}}_j(y^0 - y_d^0) + (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d))}{\tilde{\Psi}_j(0)} \prod_{i=I-I_s}^I \frac{\Psi_i(+\bar{\mathbf{v}}_i(y^0 - y_d^0) - (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d))}{\Psi_i(0)} \quad (3.47)$$

Тогда формулу (3.35) можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\nu = \Psi_s \Psi_d \int dx dy e^{-i(\bar{k}_s - \bar{p}_s)(x - x_s)} e^{-i(\bar{k}_d - \bar{p}_d)(y - y_d)} E_s(x - x_s) E_d(y - y_d) \cdot \\ \cdot \int \frac{dq}{(2\pi)^4} e^{iq(x-y)} \mathcal{M}_\nu(\{\bar{k}\}, \{\bar{p}\}; q) \end{aligned} \quad (3.48)$$

$\bar{k}_s, \bar{p}_s, \bar{k}_d, \bar{p}_d$  — обозначены соответствующие суммы импульсов:

$$\bar{k}_s = \sum_{i=1}^{I_s} \bar{k}_i, \quad \bar{p}_s = \sum_{j=1}^{F_s} \bar{p}_j, \quad \bar{k}_d = \sum_{i=I-I_s}^I \bar{k}_i, \quad \bar{p}_d = \sum_{j=F-F_s}^F \bar{p}_j. \quad (3.49)$$

Разложим  $E_s(x - x_s)$  в ряд до второго порядка <sup>14</sup> по  $x$  в окрестности  $x = x_s$

$$E_s(x - x_s) \approx 1 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 E_s(x - x_s)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right|_{x=x_s} (x - x_s)^\mu (x - x_s)^\nu \quad (3.51)$$

$$(W_s)_{\mu\nu} \equiv - \left. \frac{\partial^2 E_s(x - x_s)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right|_{x=x_s} \quad (3.52)$$

Аналогично для функции  $E_d(y - y_d)$

$$E_d(y - y_d) \approx 1 - \frac{1}{2} (W_d)_{\mu\nu} (y - y_d)^\mu (y - y_d)^\nu \quad (3.53)$$

$$(W_d)_{\mu\nu} \equiv - \left. \frac{\partial^2 E_d(y - y_d)}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \right|_{y=y_d} \quad (3.54)$$

Рассмотрим следующий объект в амплитуде ( $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} \int dx e^{-i(\bar{k}_s - \bar{p}_s)(x - x_s)} e^{iqx} E_s(x - x_s) &= e^{+iqx_s} \int dx e^{-i(\bar{k}_s - \bar{p}_s - q)(x - x_s)} E_s(x - x_s) \approx \\ &\approx e^{+iqx_s} \int dx e^{-i(\bar{k}_s - \bar{p}_s - q)(x - x_s)} e^{-\frac{1}{2}(W_s)_{\mu\nu}(x - x_s)^\mu(x - x_s)^\nu} = \\ &= e^{+iqx_s} \frac{\pi^2}{\sqrt{\det(W_s/2)}} \exp \left[ -\left(\frac{1}{2} W_s^{-1}\right)_{\mu\nu} (\bar{k}_s - \bar{p}_s - q)^\mu (\bar{k}_s - \bar{p}_s - q)^\nu \frac{1}{4} \right]. \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \int dy e^{-i(\bar{k}_d - \bar{p}_d)(y - y_d)} e^{-iqy} E_d(y - y_d) &\approx e^{-iqy_d} \int dy e^{-i(\bar{k}_d - \bar{p}_d + q)(y - y_d)} e^{-\frac{1}{2}(W_d)_{\mu\nu}(y - y_d)^\mu(y - y_d)^\nu} = \\ &= e^{-iqy_d} \frac{\pi^2}{\sqrt{\det(W_d/2)}} \exp \left[ -\left(\frac{1}{2} W_d^{-1}\right)_{\mu\nu} (\bar{k}_d - \bar{p}_d + q)^\mu (\bar{k}_d - \bar{p}_d + q)^\nu \frac{1}{4} \right] \end{aligned} \quad (3.56)$$

<sup>14</sup>Напомним, что функции  $E_s(x - x_s), E_d(y - y_d)$  имеют экстремумы (максимумы) в точках  $x = x_s, y = y_d$  соответственно

$$\left. \frac{\partial E_s(x - x_s)}{\partial x^\mu} \right|_{x=x_s} (x - x_s)^\mu = 0, \quad \left. \frac{\partial E_d(y - y_d)}{\partial y^\mu} \right|_{y=y_d} (y - y_d)^\mu = 0. \quad (3.50)$$

Здесь использована теорема для интегрирования обобщенного гауссiana: если  $A$  — вещественная матрица  $n \times n$  ( $n = 4$ ) с положительными собственными значениями, обладающая обратной матрицей  $A^{-1}$ , тогда справедливо следующее выражение

$$\int dx e^{-A_{\mu\nu}x^\mu x^\nu - ik_\mu x^\mu} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{-(A^{-1})_{\mu\nu} \frac{k^\mu k^\nu}{4}} \quad (3.57)$$

Также использовано следующее известное свойство детерминанта от произведения матриц,  $\det(AB) = \det A \det B$ . Если  $A = cI$ , где  $c$  — число  $I$  — единичная матрица, то  $\det A = c^n$ .

Определим четырехмерные объемы

$$V_s = \int dx [E_s(x - x_s)]^2 \approx \int dx e^{2[-\frac{1}{2}(W_s)_{\mu\nu}(x - x_s)^\mu(x - x_s)^\nu]} = \frac{\pi^2}{\sqrt{\det W_s}} \quad (3.58)$$

$$V_d = \int dy [E_d(y - y_d)]^2 \approx \int dy e^{2[-\frac{1}{2}(W_d)_{\mu\nu}(y - y_d)^\mu(y - y_d)^\nu]} = \frac{\pi^2}{\sqrt{\det W_d}} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\nu &= \Psi_s \Psi_d 4V_s 4V_d \int \frac{dq}{(2\pi)^4} e^{+iqx_s} \exp \left[ -\frac{1}{2}(W_s^{-1})_{\mu\nu}(\bar{k}_s - \bar{p}_s - q)^\mu(\bar{k}_s - \bar{p}_s - q)^\nu \right] \cdot \\ &\quad \cdot e^{-iqy_d} \exp \left[ -\frac{1}{2}(W_d^{-1})_{\mu\nu}(\bar{k}_d - \bar{p}_d + q)^\mu(\bar{k}_d - \bar{p}_d + q)^\nu \right] \mathcal{M}_\nu(\{\bar{k}\}, \{\bar{p}\}; q) \end{aligned}$$

$$D(q) = \frac{1}{2}(W_s^{-1})_{\mu\nu}(\bar{k}_s - \bar{p}_s - q)^\mu(\bar{k}_s - \bar{p}_s - q)^\nu + \frac{1}{2}(W_d^{-1})_{\mu\nu}(\bar{k}_d - \bar{p}_d + q)^\mu(\bar{k}_d - \bar{p}_d + q)^\nu \quad (3.60)$$

Амплитуда:

$$\mathcal{A}_\nu = \Psi_s \Psi_d 4V_s 4V_d \int \frac{dq}{(2\pi)^4} e^{+iqx_s} e^{-iqy_d} e^{-D(q)} \mathcal{M}_\nu(\{\bar{k}\}, \{\bar{p}\}; q) \quad (3.61)$$

$$-iq(y_d - x_s) = -iq^0(y_d^0 - x_s^0) + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{L}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{y}_d - \mathbf{x}_s \quad (3.62)$$

Существует теорема [2], разработанная специально для снятия подобных интегралов<sup>15</sup>:

$$\int d\mathbf{q} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{L}} \frac{F(\mathbf{q})}{A - \mathbf{q}^2 + i\varepsilon} = -\frac{2\pi^2}{L} F(-\frac{\sqrt{AL}}{L}) e^{i\sqrt{AL}} + O(L^{-\frac{2}{3}}) \quad (3.63)$$

Применим ее к нашему случаю:

$$\mathcal{M} \sim \frac{\hat{q} + m_i}{-\mathbf{q}^2 + q_0^2 - m_i^2 + i\varepsilon} \quad (3.64)$$

$$A = q_0^2 - m_i^2, \quad F(\mathbf{q}) = (\hat{q} + m_i) \cdot e^{-D(q)} \quad (3.65)$$

Снимем интегрирование по  $\mathbf{q}$  используя формулу (3.63):

$$\mathcal{A}_\nu = \Psi_s \Psi_d 4V_s 4V_d \int \frac{dq^0}{(2\pi)^4} e^{+iq^0(x_s^0 - y_d^0)} \left( -\frac{2\pi^2}{L} e^{i\sqrt{q_0^2 - m_i^2} L} e^{-D(q)} \tilde{\mathcal{M}}_\nu(\{\bar{k}\}, \{\bar{p}\}; q) (\hat{q} + m_i) \right) \quad (3.66)$$

---

<sup>15</sup> иными словами принцип кластерной разложимости не нарушается, поскольку 4-импульс нейтрino “высаживается” на массовую поверхность

Возвращаясь к следующим обозначениям (3.34), (3.36) :

$$\mathcal{M}_\nu(\{\bar{k}\}, \{\bar{p}\}; q) = \bar{C}_s^p(\{\bar{k}\}, \{\bar{p}\}) \left( \sum_i V_{\alpha i} V_{\beta i}^* \frac{\hat{q} + m_i}{q^2 - m_i^2} \right) C_d^p(\{\bar{k}\}, \{\bar{p}\}) \quad (3.67)$$

Тогда амплитуда принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\nu = \Psi_s \Psi_d 4V_s 4V_d \int \frac{dq^0}{(2\pi)^4} \left( -\frac{2\pi^2}{L} \right) e^{+iq^0(x_s^0 - y_d^0)} e^{i\sqrt{q_0^2 - m_i^2}L} e^{-D(q^0, -\frac{\sqrt{q_0^2 - m_i^2} \mathbf{L}}{L})} \\ \cdot \bar{C}_s^p(\{\bar{k}\}, \{\bar{p}\}) \left( \sum_i V_{\alpha i} V_{\beta i}^* (\hat{q} + m_i) \right) C_d^p(\{\bar{k}\}, \{\bar{p}\}) + O(L^{-\frac{2}{3}}) \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\mathbf{q} = -\frac{\sqrt{q_0^2 - m_i^2} \mathbf{L}}{L} \quad (3.69)$$

Интеграл насыщается в окрестности точки  $\lambda_i = (\bar{q}_0)_i$ . Амплитуда максимальна, когда функция  $D(q)$  имеет минимум,

$$\left. \frac{dD_i(q)}{dq^0} \right|_{q^0=\lambda_i} = 0 \quad (3.70)$$

Рассмотрим показатель экспоненты:

$$e^{+iq^0(x_s^0 - y_d^0)} \cdot e^{i\sqrt{q_0^2 - m_i^2}L} \cdot e^{-D(q)}, \quad D_i(q) = D(q^0, -\frac{\sqrt{q_0^2 - m_i^2} \mathbf{L}}{L}), \quad (3.71)$$

и ограничимся разложением только до вторых ненулевых слагаемых:

$$D_i(q) = D_i(\lambda_i) + \underbrace{\left. \frac{d^2 D_i}{dq^0} \right|_{q^0=\lambda_i}}_{\sigma_i^2} (q^0 - \lambda_i)^2 + \dots \quad (3.72)$$

$$\sqrt{q_0^2 - m_i^2} = \sqrt{\lambda_i^2 - m_i^2} + \underbrace{\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i^2 - m_i^2}}}_{v_i^{-1}} (q^0 - \lambda_i) + \dots \quad (3.73)$$

$$q^0(x_s^0 - y_d^0) = \lambda_i(x_s^0 - y_d^0) + (x_s^0 - y_d^0)(q^0 - \lambda_i) \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\nu = \Psi_s \Psi_d 4V_s 4V_d \int \frac{dq^0}{(2\pi)^4} \left( -\frac{2\pi^2}{L} \right) \\ \cdot \exp \left[ +i\lambda_i(x_s^0 - y_d^0) - D_i(\lambda_i) - \sigma_i^2 (q^0 - \lambda_i)^2 + i\sqrt{\lambda_i^2 - m_i^2}L + i(x_s^0 - y_d^0 + \frac{L}{v_i})(q^0 - \lambda_i) \right] \\ \cdot \bar{C}_s^p(\{\bar{k}\}, \{\bar{p}\}) \left( \sum_i V_{\alpha i} V_{\beta i}^* (\hat{q} + m_i) \right) C_d^p(\{\bar{k}\}, \{\bar{p}\}) \end{aligned} \quad (3.75)$$

Сумма по  $i$  в формуле (3.75) внешняя. Проинтегрируем по  $q^0$ , используя теорему для интегрирования гауссовой функции

$$\int dq^0 \exp \left[ -\sigma_i^2 (q^0 - \lambda_i)^2 - (?)i(x_s^0 - y_d^0 + \frac{L}{v_i})(q^0 - \lambda_i) \right] = \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma_i} \exp \left[ -\frac{1}{\sigma_i^2} (x_s^0 - y_d^0 + \frac{L}{v_i})^2 \frac{1}{4} \right] \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\nu = & \Psi_s \Psi_d 4V_s 4V_d \frac{1}{(2\pi)^4} \left(-\frac{2\pi^2}{L}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma_i} \cdot \exp \left[ -\frac{1}{4\sigma_i^2} (x_s^0 - y_d^0 + \frac{L}{v_i})^2 \right] \cdot \\ & \cdot \exp \left[ +i\lambda_i(x_s^0 - y_d^0) - D_i(\lambda_i) + i\sqrt{\lambda_i^2 - m_i^2}L \right] \cdot \bar{C}_s^p \left( \sum_i V_{\alpha i} V_{\beta i}^* (\hat{q} + m_i) \right) C_d^p \quad (3.77) \end{aligned}$$

Напомним, что теперь

$$\hat{q} = \gamma^0 \lambda_i - \boldsymbol{\gamma} \left( -\sqrt{\lambda_i^2 - m_i^2} \frac{\mathbf{L}}{L} \right) \quad (3.78)$$

### 3.3.2 Квадрат модуля амплитуды и вероятность нейтринных осцилляций

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_\nu|^2 = & |\Psi_s|^2 |\Psi_d|^2 V_s^2 V_d^2 \frac{4}{\pi^3 L^2} \cdot \\ & \cdot \left| \sum_i \frac{1}{\sigma_i} V_{\alpha i} V_{\beta i}^* e^{-\frac{1}{4\sigma_i^2}(x_s^0 - y_d^0 + \frac{L}{v_i})^2} e^{+i\lambda_i(x_s^0 - y_d^0) - D_i(\lambda_i) + i\sqrt{\lambda_i^2 - m_i^2}L} [\bar{C}_s^p(\hat{q} + m_i) C_d^p] \right|^2 \quad (3.79) \end{aligned}$$

Число событий (см. (4.117) и [44]) в подходе плоских волн имеет вид

$$dN = |A|^2 \prod_f \frac{d^3 \bar{p}_f}{(2\pi)^3} \quad (3.80)$$

в нашем случае (волновые пакеты)  $|\mathcal{A}|^2$  — безразмерная величина (см. определения волновых пакетов и условия нормированности), и число событий (соответствующие дифференциалы находятся в  $|\mathcal{A}|^2$ )

$$dN = |\mathcal{A}|^2 \quad (3.81)$$

4-объемы (3.58) в источнике и детекторе заменяются на соответствующие дифференциалы:

$$V_s \rightarrow dx_s^0 d\mathbf{x}_s, \quad V_d \rightarrow dy_d^0 d\mathbf{y}_d. \quad (3.82)$$

Определения  $\Psi_s, \Psi_d$ , (3.45)

$$|\Psi_s|^2 = \left| \prod_{j=1}^{F_s} \frac{\tilde{\Psi}_j(0)}{\sqrt{2E_{\bar{\mathbf{p}}_j}}} \prod_{i=1}^{I_s} \frac{\Psi_i(0)}{\sqrt{2E_{\bar{\mathbf{k}}_i}}} \right|^2 \rightarrow \prod_{j=1}^{F_s} \frac{d^3 \bar{p}_j}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{p}}_j}} \prod_{i=1}^{I_s} \frac{f_i(\bar{\mathbf{k}}_i, \mathbf{x}_s, x_s^0, \sigma_i) d^3 \bar{k}_i}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{k}}_i}} \quad (3.83)$$

$$|\Psi_d|^2 = \left| \prod_{j=F-F_s}^F \frac{\tilde{\Psi}_j(0)}{\sqrt{2E_{\bar{\mathbf{p}}_j}}} \prod_{i=I-I_s}^I \frac{\Psi_i(0)}{\sqrt{2E_{\bar{\mathbf{k}}_i}}} \right|^2 \rightarrow \prod_{j=F-F_s}^F \frac{d^3 \bar{p}_j}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{p}}_j}} \prod_{i=I-I_s}^I \frac{f_i(\bar{\mathbf{k}}_i, \mathbf{y}_d, y_d^0, \sigma_i) d^3 \bar{k}_i}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{k}}_i}} \quad (3.84)$$

$f_i(\bar{\mathbf{k}}_i, \mathbf{x}_s, x_s^0, \sigma_i)$  — функция распределения  $i$ -ой входящей частицы (в источник или детектор) в фазовом пространстве (см. также §10 *Преобразование функции распределения*, [51]),  $\sigma_i$  — спиновый индекс этой частицы.

В дальнейшем для краткости будем усреднять по спиновым состояниям как входящих, так и исходящих частиц, поэтому индекс  $\sigma_i$  не будем записывать у  $f_i$ .

Тогда формула для числа событий принимает следующий вид

$$dN = \prod_{j=1}^{F_s} \frac{d^3 \bar{p}_j}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{p}}_j}} \prod_{i=1}^{I_s} \frac{f_i(\bar{\mathbf{k}}_i, \mathbf{x}_s, x_s^0) d^3 \bar{k}_i}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{k}}_i}} \prod_{j=F-F_s}^F \frac{d^3 \bar{p}_j}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{p}}_j}} \prod_{i=I-I_s}^I \frac{f_i(\bar{\mathbf{k}}_i, \mathbf{y}_d, y_d^0) d^3 \bar{k}_i}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{k}}_i}} \cdot dx_s^0 d\mathbf{x}_s dy_d^0 d\mathbf{y}_d V_s V_d \frac{4}{\pi^3 L^2} \cdot \left| \sum_i \frac{1}{\sigma_i} V_{\alpha i} V_{\beta i}^* e^{-\frac{1}{4\sigma_i^2}(x_s^0 - y_d^0 + \frac{L}{v_i})^2} e^{+i\lambda_i(x_s^0 - y_d^0) - D_i(\lambda_i) + i\sqrt{\lambda_i^2 - m_i^2}L} [\bar{\mathbf{C}}_s^p(\hat{q} + m_i) \mathbf{C}_d^p] \right|^2 \quad (3.85)$$

После раскрытия квадрата модуля возникает следующее выражение

$$e^{-\frac{1}{4\sigma_i^2}(x_s^0 - y_d^0 + \frac{L}{v_i})^2 - \frac{1}{4\sigma_j^2}(x_s^0 - y_d^0 + \frac{L}{v_j})^2} \cdot e^{+i(\lambda_i - \lambda_j)(x_s^0 - y_d^0)} \cdot e^{i(\sqrt{\lambda_i^2 - m_i^2} - \sqrt{\lambda_j^2 - m_j^2})L} \cdot e^{-D_i(\lambda_i) - D_j(\lambda_j)} \quad (3.86)$$

Далее будет показано, что первая экспонента в этом выражении (3.86) является причиной возникновения очень нетривиального объекта в формуле для нейтринных осцилляций, которого нет в квантовомеханическом выводе (2.23); вторая экспонента в ультрапрелистическом пределе  $\lambda_i \cong \lambda_j$  равна 1, третья экспонента — это причина возникновения осциллирующего множителя, который есть в стандартном квантовомеханическом выводе, четвертая — это следствие закона сохранения импульса.

Рассмотрим интегрирование по  $dx_s^0$  (времени испускания), такой интеграл насыщается в области, в которой значение следующей экспоненты максимально:

$$e^{-\frac{1}{4\sigma_i^2}(x_s^0 - y_d^0 + \frac{L}{v_i})^2} \cdot e^{-\frac{1}{4\sigma_j^2}(x_s^0 - y_d^0 + \frac{L}{v_j})^2} \quad (3.87)$$

Найдем минимальное значение показателя:

$$\frac{1}{4\sigma_i^2}(x_s^0 - y_d^0 + \frac{L}{v_i})^2 + \frac{1}{4\sigma_j^2}(x_s^0 - y_d^0 + \frac{L}{v_j})^2 \quad (3.88)$$

$$\frac{d}{dx_s^0} : \quad \frac{1}{2\sigma_i^2}(x_s^0 - y_d^0 + \frac{L}{v_i}) + \frac{1}{2\sigma_j^2}(x_s^0 - y_d^0 + \frac{L}{v_j}) = 0 \quad (3.89)$$

$$x_s^0 = y_d^0 - L \frac{\sigma_i^2 v_i + \sigma_j^2 v_j}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} \frac{1}{v_i v_j}, \quad v_{ij}^{-1} \equiv \frac{\sigma_i^2 v_i + \sigma_j^2 v_j}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} \frac{1}{v_i v_j} \quad (3.90)$$

Если выполняется равенство  $\sigma_i \approx \sigma_j$ , то:

$$(x_s^0)_{\min} = (x_s^0)_{ij} = y_d^0 - L \frac{v_i + v_j}{2v_i v_j}, \quad (3.91)$$

и вторая производная равна:

$$\frac{d^2}{d(x_s^0)^2} : \quad \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_i^2} + \frac{1}{\sigma_j^2} \right) \approx \frac{1}{\sigma^2} \quad (3.92)$$

В ультрапрелистическом пределе  $\lambda_i \gg m_i$ , (напомним  $\lambda_i \sim E_i$  (средняя)) :  $v_i \approx v_j \approx v_{ij} \approx 1$ ,  $\lambda_i \approx \lambda$

$$|\bar{\mathbf{C}}_s^p(\hat{q} + m_i) \mathbf{C}_d^p|^2 \rightarrow \left| \left[ \bar{\mathbf{C}}_s^p \sum_{s_\nu} \nu \bar{\nu} \mathbf{C}_d^p \right] \right|^2 \rightarrow \left| \sum_{s_\nu} \mathcal{M}_s \mathcal{M}_d \right|^2 = \sum_{s_\nu} |\mathcal{M}_s|^2 |\mathcal{M}_d|^2 \quad (3.93)$$

В формуле (3.93) использовано то, что в ультраквантитативистском пределе нейтрино имеет одно спиновое состояние (спиральность почти сохраняется), поэтому сумму по спину можно не писать. Разложим показатель (3.88) до второго порядка в окрестности точки минимума  $(x_s^0)_{ij}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\sigma_i^2}(x_s^0 - y_d^0 + \frac{L}{v_i})^2 + \frac{1}{4\sigma_j^2}(x_s^0 - y_d^0 + \frac{L}{v_j})^2 \approx \\ & \approx \frac{1}{4\sigma^2} \left[ \left( \left( -\frac{v_i + v_j}{2v_i v_j} + \frac{1}{v_i} \right)^2 + \left( -\frac{v_i + v_j}{2v_i v_j} + \frac{1}{v_j} \right)^2 \right) L^2 + \frac{1}{2!} 2 \left( (x_s^0 - (x_s^0)_{ij})^2 + (x_s^0 - (x_s^0)_{ij})^2 \right) \right] = \\ & = \frac{1}{4\sigma^2} \left[ 2 \left( \frac{v_i - v_j}{2v_i v_j} \right)^2 L^2 + 2 \left( x_s^0 - y_d^0 + L \frac{v_i + v_j}{2v_i v_j} \right)^2 \right] \equiv \frac{1}{2\sigma^2} \left[ \left( \frac{v_i - v_j}{2v_i v_j} \right)^2 L^2 + z^2 \right] \quad (3.94) \end{aligned}$$

$$x_s^0 - y_d^0 \equiv \left( x_s^0 - y_d^0 + L \frac{v_i + v_j}{2v_i v_j} \right) - L \frac{v_i + v_j}{2v_i v_j} \equiv z - L \frac{v_i + v_j}{2v_i v_j} \quad (3.95)$$

здесь определена новая переменная  $z$ , очевидно  $\int dx_s^0 f(x_s^0) = \int dz f(z)$ .

$$\left( \frac{v_i - v_j}{2v_i v_j} \right)^2 \approx \frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{\lambda_i^2 - m_i^2}}{\lambda_i} - \frac{\sqrt{\lambda_j^2 - m_j^2}}{\lambda_j} \right)^2 \approx \frac{1}{4} (m_i^2 - m_j^2)^2 \frac{1}{4\lambda^4} \quad (3.96)$$

Закон сохранения импульса [1], [48] теперь находится в следующей функции, которая в пределе заменяется на  $\delta$ -функцию:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma^2}} e^{-D_i(\lambda_i)} e^{-D_i(\lambda_i)} & \rightarrow 2 \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma^2}} e^{-2D(\lambda)} = 2e^{-2D(\lambda)} \int_0^{+\infty} dE_{\mathbf{q}} e^{-2\sigma^2(E_{\mathbf{q}} - \lambda)^2} = 2 \int_0^{+\infty} dE_{\mathbf{q}} e^{-2D(E_{\mathbf{q}})} \rightarrow \\ & \rightarrow 2 \frac{\pi^8}{V_s V_d} \delta^4(\bar{p}_s - \bar{k}_s + q(\lambda)) \delta^4(\bar{p}_d - \bar{k}_d - q(\lambda)) \quad (3.97) \end{aligned}$$

Число событий:

$$\begin{aligned} dN = & \prod_{j=1}^{F_s} \frac{d^3 \bar{p}_j}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{p}}_j}} \prod_{i=1}^{I_s} \frac{f_i(\bar{\mathbf{k}}_i, \mathbf{x}_s, x_s^0) d^3 \bar{k}_i}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{k}}_i}} \prod_{j=F-F_s}^F \frac{d^3 \bar{p}_j}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{p}}_j}} \prod_{i=I-I_s}^I \frac{f_i(\bar{\mathbf{k}}_i, \mathbf{y}_d, y_d^0) d^3 \bar{k}_i}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{k}}_i}} \cdot \\ & \cdot d\mathbf{x}_s dy_d^0 d\mathbf{y}_d \sqrt{2\pi\sigma^2} \frac{4}{\pi^3 L^2} 2 \left( \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma^2}} \right)^{-1} \cdot \\ & \cdot (\pi)^8 \frac{1}{\sigma^2} \left( \sum_{i,j} V_{\alpha i}^* V_{\beta i} V_{\alpha j} V_{\beta j} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{1}{4} (m_i^2 - m_j^2)^2 \frac{1}{4\lambda^4} L^2} e^{-i \frac{1}{2\lambda} (m_i^2 - m_j^2) L} \right) \delta^4(\bar{p}_s - \bar{k}_s + q(\lambda)) \delta^4(\bar{p}_d - \bar{k}_d - q(\lambda)) \cdot \\ & \cdot \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_s|^2 \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_d|^2 \quad (3.98) \end{aligned}$$

$$|\mathcal{M}_d|^2 = |\bar{C}_d^p \nu|^2 = |\bar{C}_d^p(\{\bar{k}_i\}_d, \{\bar{p}_j\}_d) \nu(q)|^2 \quad (3.99)$$

$$|\mathcal{M}_s|^2 = |\bar{\nu} C_s^p|^2 = |\bar{\nu}(q) C_s^p(\{\bar{k}_i\}_s, \{\bar{p}_j\}_s)|^2 \quad (3.100)$$

$$d\Gamma = \frac{dN}{dy_d^0} = \int \prod_{j=1}^{F_s} \frac{d^3 \bar{p}_j}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{p}}_j}} \int \prod_{i=1}^{I_s} \frac{f_i(\bar{\mathbf{k}}_i, \mathbf{x}_s, x_s^0) d^3 \bar{k}_i}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{k}}_i}} \prod_{j=F-F_s}^F \frac{d^3 \bar{p}_j}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{p}}_j}} \int \prod_{i=I-I_s}^I \frac{f_i(\bar{\mathbf{k}}_i, \mathbf{y}_d, y_d^0) d^3 \bar{k}_i}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{k}}_i}} \cdot \int d\mathbf{x}_s \int dy_d \frac{4}{\pi^3 L^2} 4 \cdot (\pi)^8 \mathcal{P}_{\text{mix}}(\sigma(\lambda), L) \delta^4(\bar{p}_s - \bar{k}_s + q(\lambda)) \delta^4(\bar{p}_d - \bar{k}_d - q(\lambda)) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_s|^2 \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_d|^2 \quad (3.101)$$

Вероятность смешивания (ср. с формулой (2.23), полученной в рамках нерелятивистской квантовой механики)

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{mix}}(\sigma(\lambda), L) = \sum_{i,j} V_{\alpha i}^* V_{\beta i} V_{\alpha j} V_{\beta j}^* e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{1}{4} (m_i^2 - m_j^2)^2 \frac{1}{4\lambda^4} L^2} e^{-i \frac{1}{2\lambda} (m_i^2 - m_j^2) L}} \quad (3.102)$$

Напомним, что трехмерный импульс нейтрино равен  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\lambda, L)$ , формула (3.69),  $q^0 = \lambda(\{\bar{k}_i\}_s, \{\bar{p}_j\}_s, \{\bar{k}_i\}_d, \{\bar{p}_j\}_d)$ , см. (3.70), (3.60).

В случае если в детекторе только одна частица в состоянии  $|\text{in(detector)}\rangle$  то можно ввести величину дифференциального сечения (как это сделано в работе [1])

$$d\sigma = \frac{1}{2\lambda 2E_{\bar{\mathbf{k}}_1 d}} \prod_{j=F-F_s}^F \frac{d^3 \bar{p}_j}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{p}}_j}} (2\pi)^4 \delta^4(\bar{p}_d - \bar{k}_1 d - q(\lambda)) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_d|^2 \quad (3.103)$$

$$4\sqrt{(qk_1 d)^2 - m_\nu^2 m_1^2} = 4\lambda E_{\bar{\mathbf{k}}_1 d} \quad (m_\nu \ll \lambda).$$

$$d\Gamma = \left[ d\sigma 2\lambda \int \frac{f_{1d}(\bar{\mathbf{k}}_1 d, \mathbf{y}_d, y_d^0) d^3 \bar{k}_1 d}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{k}}_1 d}} \right] \int \prod_{j=1}^{F_s} \frac{d^3 \bar{p}_j}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{p}}_j}} \int \prod_{i=1}^{I_s} \frac{f_i(\bar{\mathbf{k}}_i, \mathbf{x}_s, x_s^0) d^3 \bar{k}_i}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{k}}_i}} \cdot \int d\mathbf{x}_s \int dy_d \frac{4}{\pi^3 L^2} 4 \cdot (\pi)^4 \mathcal{P}_{\text{mix}}(\sigma(\lambda), L) \delta^4(\bar{p}_s - \bar{k}_s + q(\lambda)) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_s|^2 \quad (3.104)$$

$d\Gamma$  — одночастичная дифференциальная скорость счета, при этом переменная  $\lambda \rightarrow E_{\mathbf{q}}$  является переменной интегрирования,

$$d\Gamma(\{\bar{k}\}, \{\bar{p}\}, L) = \left[ \int_0^{+\infty} \frac{1}{L^2} \frac{E_{\mathbf{q}}^2 dE_{\mathbf{q}}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{q}}} \left[ \prod_{i=1}^{I_s} \frac{1}{2E_{\bar{\mathbf{k}}_i}} \right] \left[ \int \prod_{j=1}^{F_s} \frac{d^3 \bar{p}_j}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{p}}_j}} \right] \cdot \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_s|^2 (2\pi)^4 \delta^4(\bar{p}_s - \bar{k}_s + q(E_{\mathbf{q}})) \right] \mathcal{P}_{\text{mix}}(\sigma(\lambda), L) d\sigma(\{\bar{p}\}_d, \bar{k}_1 d, E_{\mathbf{q}}) \quad (3.105)$$

Окончательно получаем, что формула скорости счета имеет вид

$$d\Gamma = \int \frac{f_{1d}(\bar{\mathbf{k}}_1 d, \mathbf{y}_d, y_d^0) d^3 \bar{k}_1 d}{(2\pi)^3} \int \prod_{i=1}^{I_s} \frac{f_i(\bar{\mathbf{k}}_i, \mathbf{x}_s, x_s^0) d^3 \bar{k}_i}{(2\pi)^3} \cdot \int d\mathbf{x}_s \int dy_d d\Gamma(\{\bar{k}\}, \{\bar{p}\}, L) \quad (3.106)$$

### 3.4 Нейтринные осцилляции в веществе

Если нейтрино массивны, то вполне вероятно, что они смешиваются.

Если нейтрино смешиваются, то они должны осциллировать.

Если осцилляции происходят в веществе, то взаимодействия нейтрино модифицируют осцилляционную картину. [39]

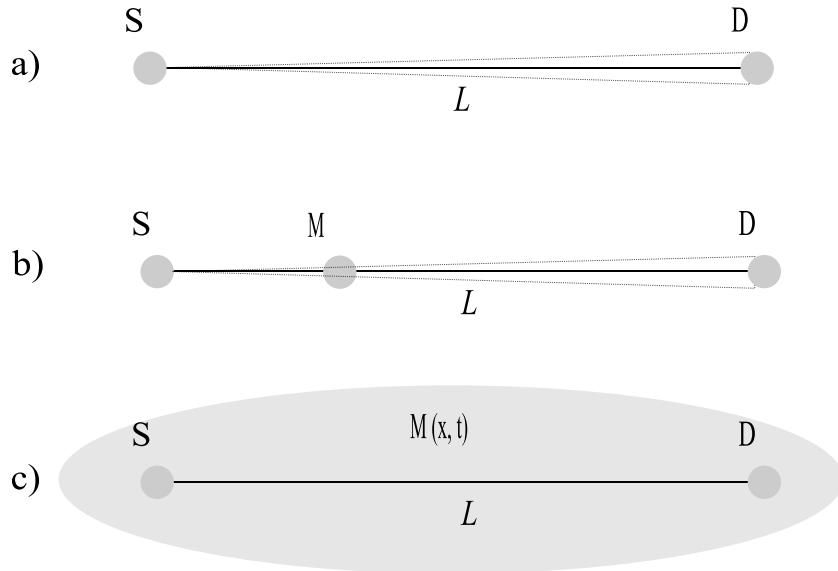
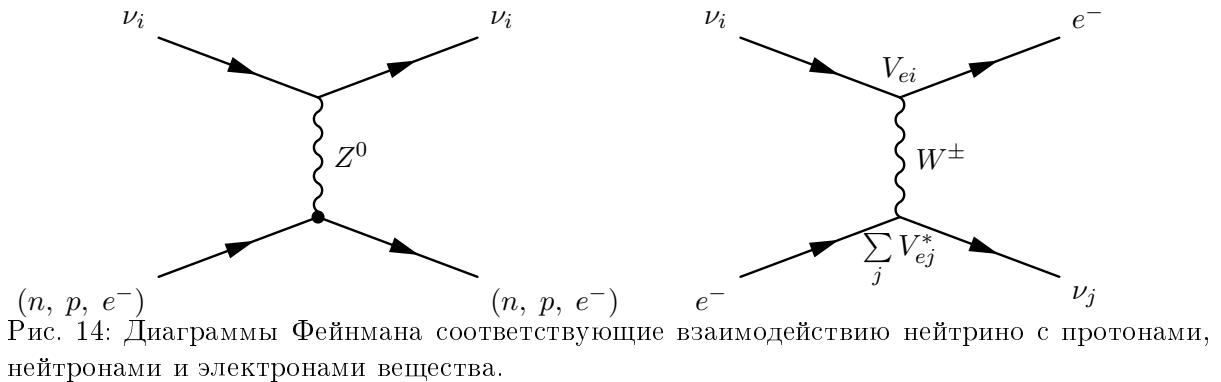


Рис. 13: Распространение нейтрино из источника в детектор а) в вакууме, б) через вещество, которое локализовано между источником и детектором, в) в веществе с переменной плотностью в общем случае.



Лагранжиан взаимодействия нейтрино с веществом<sup>16</sup>:

$$(\mathcal{L}_{\text{int}})_i \propto \sum_{f=p,n,e} \bar{\nu}_i \gamma_\mu (1-\gamma_5) \nu_i \cdot \bar{f} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) f + \sum_{j=1,2,3} \bar{e} \gamma_\mu (1-\gamma_5) V_{ei} \nu_i \cdot V_{ej}^* \bar{\nu}_j \gamma^\mu (1-\gamma_5) e \quad (3.107)$$

Лагранжианы взаимодействия нейтрино в источнике и в детекторе определены в формулках (3.19), (3.20). Напомним

$$\mathcal{L}_{s,d} = \sum_i (\mathcal{L}_{s,d})_i \quad (3.108)$$

<sup>16</sup>вид адронной вершины не зависит от переданного импульса — структурные функции нуклона не рассматриваются, поскольку переданный импульс равен нулю (абсолютно упругое рассеяние нейтрино вперед).

Для упрощения будем представлять среду, состоящую только из электронов, тогда лагранжиан взаимодействия нейтрино с электронами имеет следующий вид

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_m)_{ij} &= (\mathcal{L}_{NC})_{ij} + (\mathcal{L}_{CC})_{ij} \propto \\ &\propto \delta_{ij} \bar{\nu}_j \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_i \cdot \bar{e} \gamma^\mu (g_V^e - g_A^e \gamma_5) e + V_{ej}^* V_{ei} \bar{\nu}_j \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_i, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Применив преобразование Фирца для взаимодействия СС, получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m(z) &= \sum_{ij} (\mathcal{L}_m)_{ij} \propto \sum_{ij} (\delta_{ij} \bar{\nu}_j \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_i \cdot \bar{e} \gamma^\mu (g_V^e - g_A^e \gamma_5) e + V_{ej}^* V_{ei} \bar{\nu}_j \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_i) = \\ &= \left( \sum_i \bar{\nu}_i \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_i \cdot \bar{e} \gamma^\mu (g_V^e - g_A^e \gamma_5) e \right) + \bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e = \\ &= \sum_{ij} \bar{\nu}_i \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_j \cdot \bar{e} \gamma^\mu (\delta_{ij} (g_V^e - g_A^e \gamma_5) - V_{ei}^* V_{ej} (1 - \gamma_5)) e = \\ &= \sum_{ij} \bar{\nu}_i(z) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_j(z) \cdot (\tilde{J}_e^\mu(z))_{ij} \end{aligned} \quad (3.110)$$

$\tilde{J}_e^\mu$  обозначен электронный обобщенный ток, который содержит нейтральный и преобразованный заряженный токи:

$$(\tilde{J}_e^\mu(z))_{ij} = \bar{e}(z) \gamma^\mu (\delta_{ij} (g_V^e - g_A^e \gamma_5) - V_{ei}^* V_{ej} (1 - \gamma_5)) e(z) \quad (3.111)$$

Определим состояние вещества  $|m\rangle$  в случае полного неперекрывания волновых пакетов отдельных электронов вещества<sup>17</sup>:

$$|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_e!}} (-1)^\lambda \left( \prod_{i=1}^{N_e} \int \frac{d^3 p_{e_i}}{(2\pi)^3} \varphi_{e_i}(p_{e_i}) \right) |\mathbf{p}_{e_1} \dots \mathbf{p}_{e_{N_e}}\rangle \quad (3.112)$$

$\lambda$  — число перестановок электронов. Выберем следующую нормировку  $\langle m|m\rangle = 1$ . Стого говоря, такую нормировку, не содержащую объема  $V$ , можно выбрать только в формализме состояний, описываемых волновыми пакетами (см., например, [41] §21.2).

$$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad |e_i\rangle = \int \frac{d^3 p_{e_i}}{(2\pi)^3} \varphi_{e_i}(p_{e_i}) |\mathbf{p}_{e_i}\rangle. \quad (3.113)$$

### 3.4.1 Амплитуда

В случае наличия вещества in-, out- состояния модифицируются следующим образом:

$$|i\rangle = |i_m\rangle = |i_v\rangle \otimes |m\rangle = |i_s\rangle \otimes |i_d\rangle \otimes |m\rangle \quad (3.114)$$

$$|f\rangle = |f_m\rangle = |f_v\rangle \otimes |m\rangle = |f_s\rangle \otimes |f_d\rangle \otimes |m\rangle, \quad (3.115)$$

причем состояние вещества  $|m\rangle$  не изменяется в процессе распространения нейтрино в нем, в этом одна из особенностей данного рассмотрения, и это означает абсолютно упругое рассеяние вперед<sup>18</sup> нейтрино на веществе. Такое рассмотрение не применимо, если вещество такое, что длина свободного пробега нейтрино меньше или много меньше расстояния, которое нейтрино проходит в этом веществе, примеры такого сверхплотного (для нейтрино)

<sup>17</sup>Более общий случай с частичным перекрытием рассматривается в статье [52].

<sup>18</sup>абсолютно упругое рассеяние вперед — такое рассеяние, при котором начальное и конечное состояния полностью идентичны  $|i\rangle = |f\rangle$ .

вещества — нейтронные звезды, черные дыры, (и может быть предсверхновые) и сверхплотное вещество на ранней стадии эволюции Вселенной<sup>19</sup>, но не астрофизические ультрарелятивистские джеты, т.к. в них вещество представляет сравнительно разреженный релятивистский газ.

Амплитуда (считая, что вещество полностью не изменилось при прохождении через него нейтрино, поэтому здесь  $|m_{in}\rangle \neq |m_{out}\rangle$ ) с ампутациями соответствующих неприводимых диаграмм на входящих и исходящих линиях (см. [43] Гл.4 ) равна:

$$\mathcal{A} \equiv \langle f|S-1|i\rangle = \langle f|\text{T}e^{i\int(\mathcal{L}_s(x)+\mathcal{L}_d(x)+\mathcal{L}_m(x))dx}-1|i\rangle \approx \langle f|\text{T} \left[ i^2 \underbrace{\int \mathcal{L}_s(x)\mathcal{L}_d(y) dx dy}_{\sim G_F^2} \underbrace{e^{i\int \mathcal{L}_m(z)dz}}_{e^{\sim G_F}} \right] |i\rangle \quad (3.116)$$

Только в случае абсолютно упругого рассеяния вперед нейтрино на веществе можно записывать полную амплитуду как сумму амплитуд n-кратного рассеяния, т.к. in out состояния одинаковы для каждого процесса n. Иными словами выражение

$$\frac{1}{2}\langle f_1|(S-1)|i_1\rangle + \frac{1}{2}\langle f_2|(S-1)|i_2\rangle \quad (3.117)$$

имеет физический смысл амплитуды процесса  $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ , если только  $|i_1\rangle = |i_2\rangle = |i\rangle$  и  $|f_1\rangle = |f_2\rangle = |f\rangle$ .

Определим интегральный оператор  $\hat{\mathcal{W}}$  как произведение интегральных коммутирующих операторов, действующих в пространстве  $\mathcal{L}^2(p)$ :

$$\hat{\mathcal{W}} = \prod_{n \in N_{s+d}, N_m} \int [d\mathbf{p}_n] \varphi(p_n), \quad [d\mathbf{p}_n] = \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 \sqrt{2p_n^0}} \quad (3.118)$$

$N_{s+d}$  — число всех входящих и исходящих частиц в источнике и детекторе за исключением распространяющегося нейтрино,  $N_m$  — число частиц вещества (в нашем рассмотрении это — электроны, протоны и нейтроны), на которых нейтрино абсолютно упруго рассеялось, не изменив своего импульса. Тогда амплитуда может быть записана как (если поля в лагранжиане не содержат операторов рождения/уничтожения с размазками)

$$\mathcal{A} = \hat{\mathcal{W}} (\mathcal{A}_0^{pw} + \mathcal{A}_1^{pw} + \mathcal{A}_2^{pw} + \dots) \quad (3.119)$$

$\mathcal{A}_n^{pw}$  — амплитуда в формализме плоских волн ( $pw$  — plane wave) процесса, в котором нейтрино n-кратно взаимодействует с частицами вещества<sup>20</sup>, n является порядком разложения по степени  $G_F$  лагранжиана  $\mathcal{L}_m$ .  $A_n^{pw}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  имеет вид (суммирование по повторяющимся индексам):

$$A_n^{pw} = \left( \frac{G_F}{\sqrt{2}} i \right)^2 \int dy \bar{C}_d^p e^{-i(p_d - k_d)y} V_{\beta j} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{+iqy} \\ \left[ \left( \frac{G_F}{\sqrt{2}} i \right) \frac{i}{\hat{q} - m_j} \gamma_{\mu_1} (1 - \gamma_5) (\tilde{J}_e^{\mu_1}(p_e^{(1)}))_{jl_1} \cdot \left( \frac{G_F}{\sqrt{2}} i \right) \frac{i}{\hat{q} - m_{l_1}} \gamma_{\mu_2} (1 - \gamma_5) (\tilde{J}_e^{\mu_2}(p_e^{(2)}))_{l_1 l_2} \right. \\ \left. \dots \left[ \left( \frac{G_F}{\sqrt{2}} i \right) \frac{i}{\hat{q} - m_{l_{n-1}}} \gamma_{\mu_n} (1 - \gamma_5) (\tilde{J}_e^{\mu_n}(p_e^{(n)}))_{l_{n-1} i} \right] \right. \\ \left. \frac{i}{\hat{q} - m_i} e^{-iqx} V_{\alpha i}^* \int dx e^{-i(p_s - k_s)x} C_s^p \quad (3.120) \right]$$

<sup>19</sup> к задаче о нахождении средних плотностей реликтовых нейтрино  $\langle n_i \rangle$ .

<sup>20</sup> С учетом 1-ой поправки ряд будет заканчиваться разложением по  $N_e^2$  степени  $G_F$  ( $N_e$  — число всех электронов вещества и  $N_e \rightarrow \infty$ ).

Интегрирование по  $x$  и  $y$  не снято, т.к. предполагается, что оператор  $\hat{\mathcal{W}}\mathcal{P}$  зависит от  $x$  и  $y$ . Амплитуда в формализме волновых пакетов  $\mathcal{A}$  (среда из  $n$  электронов):

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \hat{\mathcal{W}}\mathcal{P} \left( \frac{G_F}{\sqrt{2}} i \right)^2 \int dy \bar{C}_d^p e^{-i(p_d - k_d)y} V_{\beta j} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{+iqy} \\ & \left( S_i(q) \delta_{ij} + S_j(q) \mathbb{K}_{ji}(p_e^{(1)}) S_i(q) + S_j(q) \mathbb{K}_{jl_1}(p_e^{(1)}) S_{l_1}(q) \mathbb{K}_{l_1 i}(p_e^{(2)}) S_i(q) + \dots \right. \\ & \left. \dots + S_j(q) \mathbb{K}_{jl_1}(p_e^{(1)}) S_{l_1}(q) \mathbb{K}_{l_1 l_2}(p_e^{(2)}) \dots S_{l_{n-1}}(q) \mathbb{K}_{l_{n-1} i}(p_e^{(n)}) S_i(q) + \text{corrections} \right) \\ & e^{-iqx} V_{\alpha i}^* \int dx e^{-i(p_s - k_s)x} C_s^p \quad (3.121) \end{aligned}$$

Пропагатор нейтрино  $S_i(q) = i(\hat{q} - m_i)^{-1}$ . Введена следующая матрица в пространстве  $4N \times 4N$ , являющаяся прямым произведением спинорного и нейтринного массового базиса ( $N$  число поколений нейтрино):

$$\mathbb{K}_{ji}(p_e^{(1)}) = \left( \frac{G_F}{\sqrt{2}} i \right) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) (\tilde{J}_e^\mu(p_e^{(1)}))_{ij} \quad (3.122)$$

Здесь использовано условие нормировки:

$$\int [d\mathbf{k}_e^{(1)}] \int [d\mathbf{p}_e^{(1)}] \varphi_e^*(k_e^{(1)}) \varphi_e(p_e^{(1)}) \underbrace{\langle \mathbf{k}_e^{(1)} | \mathbf{p}_e^{(1)} \rangle}_{(2\pi)^3 2E_e^{(1)} \delta^3(\mathbf{k}_e^{(1)} - \mathbf{p}_e^{(1)})} = \int \frac{d\mathbf{p}_e^{(1)}}{(2\pi)^3} \underbrace{|\varphi_e(p_e^{(1)})|^2}_{f(T, p_e^{(1)})} = 1 \quad (3.123)$$

Ток:

$$\begin{aligned} (\tilde{J}_e^\mu(p_e))_{ij} &= \bar{u}_e(p_e) \gamma^\mu (\delta_{ij} (g_V^e - g_A^e \gamma_5) - V_{ei}^* V_{ej} (1 - \gamma_5)) u_e(p_e) = \\ &= \frac{1}{2} \text{Sp} [(\hat{p}_e + m_e)(1 + \gamma_5 \hat{s}_e) \gamma^\mu (\delta_{ij} (g_V^e - g_A^e \gamma_5) - V_{ei}^* V_{ej} (1 - \gamma_5))] = \\ &= 2\delta_{ij} ((p_e)^\mu g_V^e - m_e(s_e)^\mu g_A^e) + 2V_{ei}^* V_{ej} (-(p_e)^\mu + m_e(s_e)^\mu) \quad (3.124) \end{aligned}$$

Матрица  $\mathbb{K}$ :

$$\mathbb{K}_{ji}(p_e) = \left( \frac{G_F}{\sqrt{2}} i \right) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) 2 [\delta_{ij} ((p_e)^\mu g_V^e - m_e(s_e)^\mu g_A^e) + V_{ei}^* V_{ej} (-(p_e)^\mu + m_e(s_e)^\mu)] \quad (3.125)$$

Если среда не поляризована, то усредняя по спину электрона, получим следующие выражения на  $(\tilde{J}_e^\mu(p_e))_{ij}$ ,  $\mathbb{K}_{ji}(p_e)$ ,

$$(\tilde{J}_e^\mu(p_e))_{ij} = 4(p_e)^\mu [\delta_{ij} g_V^e - V_{ei}^* V_{ej}] \quad (3.126)$$

$$\mathbb{K}_{ji}(p_e) = \left( \frac{G_F}{\sqrt{2}} i \right) (1 + \gamma_5) 4 [\delta_{ij} g_V^e - V_{ei}^* V_{ej}] \hat{u}_e \frac{N_e}{2} \quad (3.127)$$

$u_e^\mu = \frac{p_e^\mu}{m}$  — компоненты средней 4-скорости электрона вещества (скорость вещества).

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{ji} &= S_i(q) \delta_{ij} + S_j(q) \mathbb{K}_{ji}(p_e^{(1)}) S_i(q) + S_j(q) \mathbb{K}_{jl_1}(p_e^{(1)}) S_{l_1}(q) \mathbb{K}_{l_1 i}(p_e^{(2)}) S_i(q) + \dots \\ &\dots + S_j(q) \mathbb{K}_{jl_1}(p_e^{(1)}) S_{l_1}(q) \mathbb{K}_{l_1 l_2}(p_e^{(2)}) \dots S_{l_{n-1}}(q) \mathbb{K}_{l_{n-1} i}(p_e^{(n)}) S_i(q) \quad (3.128) \end{aligned}$$

Если электронов, на которых нейтрино абсолютно упруго рассеялось вперед, бесконечно много и они тождественны между собой, то уравнение (3.128) можно записать в виде

$$\mathbb{G} = \mathbb{S}(1 + \mathbb{K}\mathbb{G}) \quad (3.129)$$

$$(\mathbb{S}^{-1} - \mathbb{K})\mathbb{G} = \mathbb{I}, \quad \mathbb{G} = (\mathbb{S}^{-1} - \mathbb{K})^{-1}, \quad \mathbb{S}_{ij}^{-1} = (-i)(\hat{q} - m_i)\delta_{ij} \quad (3.130)$$

### 3.4.2 Функция Грина и вероятность осцилляций

По аналогии с вычислениями амплитуды в вакуумном случае (3.61), до применения теоремы (3.63):

$$\mathcal{A}^{vac} = \Psi_s \Psi_d 4V_s 4V_d \int \frac{dq}{(2\pi)^4} e^{+iqx_s} e^{-iqy_d} e^{-D(q)} \bar{C}_d^p \sum_i V_{\beta i} V_{\alpha i}^* \frac{1}{\hat{q} - m_i} C_s^p,$$

запишем более общую формулу амплитуды рассеяния при наличии вещества между источником и детектором:

$$\mathcal{A} = \Psi_s \Psi_d 4V_s 4V_d \int \frac{dq}{(2\pi)^4} e^{+iqx_s} e^{-iqy_d} e^{-D(q)} \bar{C}_d^p \sum_{i,j} V_{\beta j} V_{\alpha i}^* G_{ji}(q) C_s^p$$

(3.131)

Функция Грина:

$$G = (\mathbb{S}^{-1} - \mathbb{K})^{-1} = ((-i)(\hat{q} - \mathbf{m}) - \mathbb{K})^{-1}, \quad \mathbf{m}_{ij} = m_i \delta_{ij} \quad (3.132)$$

Обратная матрица:

$$G^{-1} = (-i)(\hat{q} - \mathbf{m}) - \mathbb{K} \quad (3.133)$$

Умножим уравнение (3.133) справа на  $\hat{q} + \mathbf{m}$ :

$$G^{-1}(\hat{q} + \mathbf{m}) = (-i)(q^2 - \mathbf{m}^2) - \mathbb{K}(\hat{q} + \mathbf{m}) \equiv (-i)(q^2 - M^2) \equiv L \quad (3.134)$$

$$G^{-1}(\hat{q} + \mathbf{m})L^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad G = (\hat{q} + \mathbf{m})L^{-1} \quad (3.135)$$

Необходимо привести  $L \equiv (-i)(q^2 - M^2)$ ,  $M^2 = \mathbf{m}^2 - i\mathbb{K}(\hat{q} + \mathbf{m})$  к диагональному виду (в пространстве матриц  $N \times N$ , чтобы применить теорему Гримуса–Стокингера (3.63)), унитарным преобразованием  $T$ :

$$T M^2 T^\dagger = \text{diag}(M_1^2, M_2^2, \dots, M_N^2) \quad (3.136)$$

Решение матричного уравнения (3.128) формально<sup>21</sup> можно записать как

$$G = (\mathbb{S}^{-1} - \mathbb{K})^{-1} \quad (3.137)$$

В ультрарелятивистском случае функция Грина [52]:

$$G = T^\dagger (\hat{q} - M^2)^{-1} T \hat{q}, \quad \text{где } \hat{q} = q_0(1, \mathbf{n}) \quad (3.138)$$

$\mathbf{n}$  — единичный вектор направления движения нейтрино с нулевой массой.

$$M^2_{ij} = m_i^2 \delta_{ij} - 2q_0(1 - \mathbf{u}\mathbf{n}) \Gamma_e W_{ij} \quad (3.139)$$

Матрица смешивания в вакууме заменяется на матрицу смешивания в веществе, аналогично как в квантово-механическом выводе (2.38),

$$V_{vac} \rightarrow U_m = T V_{vac}, \quad m_i \rightarrow M_i \quad (3.140)$$

В случае ультрарелятивистской среды, если  $\mathbf{u}\mathbf{n} = 1$ , то  $M^2_{ij} \rightarrow m_i^2 \delta_{ij}$ , нейтринные осцилляции в веществе совпадают с вакуумными нейтринными осцилляциями.

Вероятность осцилляций, ср. с формулой (3.102), в веществе принимает вид:

$$\mathcal{P}_{mix}^m = \sum_{i,j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{1}{4} (M_i^2 - M_j^2)^2 \frac{1}{4\lambda^4} L^2} e^{-i \frac{1}{2\lambda} (M_i^2 - M_j^2) L}$$

(3.141)

<sup>21</sup>в полной аналогии с уравнением Дайсона на полный пропагатор.

### 3.5 Резюме

Получены формулы для вероятности нейтринных осцилляций в рамках квантовой теории поля в вакууме (3.102) и веществе (3.141) с использованием описания частиц в источнике и детекторе волновыми пакетами. Показано, что в пределе плоских волн величина  $\sigma^2$  (см. Приложение А.1), входящая в формулу вероятности нейтринных осцилляций в вакууме, стремится к  $\infty$ , а значит, в этом пределе формула вероятности нейтринных осцилляций в вакууме переходит в известную формулу (2.23), полученную в рамках нерелятивистской квантовой механики. Однако, стоит заметить, что амплитуда в пределе плоских волн ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) стремится к нулю, согласно формуле (3.77), что на сегодняшний момент интерпретируется как отсутствие нейтринных осцилляций и несогласованность между нерелятивистской квантовой механикой и квантовой теорией поля в пределе плоских волн. Это новое явление — отсутствие осцилляций в пределе плоских волн в КТП, возможно требует ещё более детального дальнейшего изучения. Как существенный недостаток развитой теории следует подчеркнуть не ковариантность волновых пакетов и полученных выражений относительно преобразований Лоренца. Дальнейшего изучения также требует связь полученного выражения для вероятности (3.141) с MSW-эффектом.

S-матричный формализм рассеяния в квантовой теории поля позволяет принципиально по-другому рассматривать явление нейтринных осцилляций нежели нерелятивистский квантово-механический подход к процессу рассеяния. Причина возникновения осцилляций — интерференция амплитуд рассеяния, в которых возникают пропагаторы отдельных массивных нейтрино вследствие отсутствия нейтрино в in- и out- состояниях.

В приложении А.4 приведен альтернативный способ вывода формулы вероятности нейтринных осцилляций в вакууме, используя принцип кластерной разложимости S-матрицы в КТП.

## 4 Рассеяние нейтрино на нейтроне и $\beta$ -распад

Посчитаем амплитуды для следующих процессов (Рис. 15)

$$\nu_i + n \rightarrow e^- + p, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

$$\sum_i$$

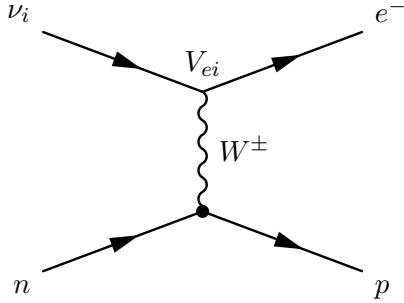


Рис. 15: Реакция обратного  $\beta$ -распада.

Рассмотрим процесс обратного  $\beta^+$ -распада

$$\bar{\nu}_i + p \rightarrow e^+ + n \quad (4.2)$$

[50], [53] учитывая что  $q^2 \ll m_W^2$  и делая соответствующие предположения на структуру адронного тока, запишем матричный элемент этого процесса

$$\mathcal{M} = \bar{G} \bar{p} \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) n \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu \quad (4.3)$$

$$\bar{G} = \frac{G_F \cos \theta_C}{\sqrt{2}} g_V, \quad \lambda = \frac{g_A}{g_V}. \quad (4.4)$$

Полный матричный элемент с полной вершиной и всеми формфакторами в адронном токе приведен, например, в книге [14], гл. 8. При малых передачах импульса  $q^2 \ll m_W^2$

$$g_A = g_1(q^2 = 0) = 1.25 \quad (4.5)$$

$$g_A^2 + g_V^2 = g_1^2(0) + g_2^2(0) = 2.59, \quad \rightarrow \quad g_V^2 = 1.0275, \quad \lambda^2 \approx 1.52 \quad (4.6)$$

Значение угла Кабибо, [54],

$$\cos \theta_C \approx |V_{ud}| \approx 0.97, \quad \cos^2 \theta_C \approx 0.94. \quad (4.7)$$

Можно показать:

$$\mathcal{M} = \bar{u}_1 O_\alpha u_2 \bar{u}_3 O^\alpha u_4, \quad \mathcal{M}^\dagger = \bar{u}_2 O_\alpha u_1 \bar{u}_4 O^\alpha u_3 \quad (4.8)$$

$$\mathcal{M} \propto \bar{p} \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) n \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu, \quad \mathcal{M}^\dagger \propto \bar{n} \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) p \bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e \quad (4.9)$$

Для ферми-полей справедливы равенства:

$$u(p, s) \bar{u}(p, s) = \frac{1}{2} (\hat{p} + m)(1 + \gamma_5 \hat{s}), \quad \sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = (\hat{p} + m) \quad (4.10)$$

Квадрат модуля матричного элемента:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \mathcal{M} \mathcal{M}^\dagger \propto [\bar{p} \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) n] (\bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu) [\bar{n} \gamma_\beta (1 - \lambda \gamma_5) p] (\bar{\nu} \gamma^\beta (1 - \gamma_5) e) = \\ &= \text{Sp} [p \bar{p} \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) n \bar{n} \gamma_\beta (1 - \lambda \gamma_5)] \text{Sp} (e \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu \bar{\nu} \gamma^\beta (1 - \gamma_5)) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Используя (4.10), суммируя по спинам и усредняя по спинам конечных частиц,

$$\sum_{s_n, s_p, s_e, s_\nu} |\mathcal{M}|^2 \propto \text{Sp} [(\hat{p}_p + m_p) \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) (\hat{p}_n + m_n) \gamma_\beta (1 - \lambda \gamma_5)] \cdot \\ \cdot \text{Sp} \left( (\hat{p}_e + m_e) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (\hat{p}_\nu + m_\nu) \gamma^\beta (1 - \gamma_5) \right) \quad (4.12)$$

Для вычисления надо пользоваться соотношениями коммутации  $\gamma$ -матриц:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (4.13)$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0, \quad \hat{p} = \gamma_\mu p^\mu, \quad \text{Sp}[\gamma_\mu^{(1)} \gamma_\nu^{(2)} \dots \gamma_\alpha^{(n)}] = 0, \quad (4.14)$$

если  $n$  — нечетное число.

$$(1 - \lambda \gamma_5)^2 = 1 + \lambda^2 - 2\lambda \gamma_5, \quad (1 + \lambda \gamma_5)(1 - \lambda \gamma_5) = 1 - \lambda^2 \quad (4.15)$$

Посчитаем следующий  $\text{Sp}$

$$\begin{aligned} & \text{Sp} (\hat{p}_1 + m_1) \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) (\hat{p}_2 + m_2) \gamma_\beta (1 - \lambda \gamma_5) = \\ &= \text{Sp} \hat{p}_1 (1 - \lambda \gamma_5) \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) (\hat{p}_2 + m_2) \gamma_\beta + m_1 \text{Sp} \gamma_\mu (1 + \lambda \gamma_5) (1 - \lambda \gamma_5) (\hat{p}_2 + m_2) \gamma_\beta = \\ &= (1 + \lambda^2) \text{Sp} \hat{p}_1 \gamma_\mu \hat{p}_2 \gamma_\beta - 2\lambda \text{Sp} \hat{p}_1 \gamma_\mu \gamma_5 \hat{p}_2 \gamma_\beta + m_1 m_2 (1 - \lambda^2) \text{Sp} \gamma_\mu \gamma_\beta \end{aligned} \quad (4.16)$$

Воспользовавшись следующими выражениями:

$$\text{Sp} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu = 4(g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu}), \quad (4.17)$$

$$\text{Sp} \gamma_\mu \gamma_\nu = 4g_{\mu\nu} \quad \text{Sp} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu = 4i\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (4.18)$$

После несколько громоздких преобразований, получим:

$$\begin{aligned} & \text{Sp}(\hat{p}_1 + m_1) \gamma^\mu (1 - \lambda \gamma_5) (\hat{p}_2 + m_2) \gamma^\beta (1 - \lambda \gamma_5) = \\ &= (1 + \lambda^2) 4(p_1^\mu p_2^\beta + p_1^\beta p_2^\mu - (p_1 p_2) g^{\mu\beta}) - 2\lambda 4ip_1{}_\alpha p_2{}_\nu \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} + m_1 m_2 (1 - \lambda^2) 4g^{\mu\beta} \end{aligned} \quad (4.19)$$

(4.19) — это первый  $\text{Sp}$  в формуле (4.12), если  $\lambda = 1$ , то получим 2-ой  $\text{Sp}$  в формуле (4.12).

$$g_{\alpha\beta} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = 0, \quad \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon^{\alpha'\beta\mu\nu'} = 2(g^{\alpha\alpha'} g^{\nu\nu'} - g^{\alpha\nu'} g^{\alpha'\nu}) \quad (4.20)$$

Преобразуем формулу (4.12) с помощью выражений для следов  $\gamma$ -матриц, к виду

$$\begin{aligned} & \sum_{s_n, s_p, s_e, s_\nu} |\mathcal{M}|^2 = \\ &= 2\bar{G}^2 32 [(1 + \lambda)^2 (p_p p_e) (p_n p_\nu) + (1 - \lambda)^2 (p_p p_\nu) (p_n p_e) - (1 - \lambda^2) m_p m_n (p_e p_\nu)] \end{aligned} \quad (4.21)$$

Эта формула совпадает с аналогичной формулой в [55]. Если в лептонном токе коэффициент перед  $\gamma_5$  не равен 1, то масса нейтрino появляется в явном виде в амплитуде.

Если нейtron и протон почти покоятся  $p_p = (m_p, 0)$ ,  $p_n = (m_n, 0)$ , то<sup>22</sup> формула (4.21) принимает вид<sup>23</sup>

$$\sum_s |\mathcal{M}|^2 \sim m_p m_n E_e E_\nu [1 + 3\lambda^2 + (1 - \lambda^2) v_e v_\nu \cos \theta] \quad (4.22)$$

---

<sup>22</sup>  $\sum_s |\mathcal{M}|^2 \sim m_p m_n E_e E_\nu [(1 + \lambda)^2 + (1 - \lambda)^2 - (1 - \lambda^2)(1 - v_e v_\nu \cos \theta)]$

<sup>23</sup>  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{E}}{d\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{E} c^2$

Эта формула совпадает с аналогичной формулой в [55],  $\mathbf{v}_e$ ,  $\mathbf{v}_\nu$  — скорости электрона и нейтрино соответственно:

$$\mathbf{v}_e = \frac{\mathbf{p}_e}{E_e}, \quad \mathbf{v}_\nu = \frac{\mathbf{p}_\nu}{E_\nu} \quad (4.23)$$

$\cos \theta$  — угол между направлениями вылета электрона и нейтрино.

При рассмотрении безпороговой реакции обратного  $\beta^-$ -распада  $\nu_i + n \rightarrow e^- + p$ , матричный элемент, (4.3)  $n \rightleftharpoons p$ , имеет вид

$$\mathcal{M} = \bar{G} \bar{n} \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) p \bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e \quad (4.24)$$

формула квадрата модуля матричного элемента (4.21)  $n \rightleftharpoons p$  принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{s_n, s_p, s_e, s_\nu} |\mathcal{M}|^2 &= \\ &= 2\bar{G}^2 32 [(1 + \lambda)^2 (p_n p_e) (p_p p_\nu) + (1 - \lambda)^2 (p_n p_\nu) (p_p p_e) - (1 - \lambda^2) m_p m_n (p_e p_\nu)] \end{aligned} \quad (4.25)$$

## 4.1 Дифференциальное сечение рассеяния

Восстановим все коэффициенты в квадрате матричного элемента (4.22)

$$\sum_s |\mathcal{M}|^2 = 2\bar{G}^2 32 m_p m_n E_e E_\nu [1 + 3\lambda^2 + (1 - \lambda^2) v_e v_\nu \cos \theta] \quad (4.26)$$

Посчитаем дифференциальное сечение рассеяния, если частица  $b$  рассеивается на неподвижной частице  $a$  [48]

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i)}{4m_a E_b v_b} \frac{1}{4(2I_a + 1)(2I_b + 1)} \overline{|\mathcal{M}_{if}|^2} \prod_{f=1}^n \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} \quad (4.27)$$

$v_b$  — скорость частицы  $b$ ,  $(2I_a, b + 1)$  — число возможных спиновых состояний начальных частиц  $a$  и  $b$ ,  $\overline{|\mathcal{M}_{if}|^2}$  — усредненный по начальным и конечным состояниям квадрат модуля матричного элемента. Применим это к нашему случаю:  $a = p$ ,  $b = \nu$ ,

$$d\sigma^{(\bar{\nu}p \rightarrow ne)} = \frac{(2\pi)^4 \delta^3(\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_e - \mathbf{p}_\nu) \delta(E_n + E_e - m_p - E_\nu)}{4m_p E_\nu v_\nu} \frac{1}{4} \sum_s |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3 2E_e} \quad (4.28)$$

Проинтегрировав по  $d^3 p_n$  с трехмерной  $\delta$ -функцией и подставив значение (4.26), в приближении  $E_n \approx m_n$  получим:

$$d\sigma^{(\bar{\nu}p \rightarrow ne)} = \bar{G}^2 \frac{\delta(E_n + E_e - m_p - E_\nu)}{2\pi v_\nu} \mathbf{p}_e^2 d^1 |\mathbf{p}_e| d\cos \theta [1 + 3\lambda^2 + (1 - \lambda^2) v_e v_\nu \cos \theta] \quad (4.29)$$

$$\mathbf{p}_e^2 d^1 |\mathbf{p}_e| = |\mathbf{p}_e| E_e dE_e \quad (4.30)$$

Проинтегрируем по  $dE_e$  с помощью  $\delta$ -функции, получим

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\cos \theta} = \bar{G}^2 \frac{1}{2\pi v_\nu} |\mathbf{p}_e| E_e [1 + 3\lambda^2 + (1 - \lambda^2) v_e v_\nu \cos \theta]} \quad (4.31)$$

$$\boxed{\nu + N(\text{rest}) \rightarrow N'(\text{rest}) + e} \quad (4.32)$$

В точности<sup>24</sup> такая формула получена в работе [55], (12). Для нерелятивистских нейтрино сечение возрастает с уменьшением скорости как  $\frac{1}{v_\nu}$ .

<sup>24</sup>С точностью до фактора 1/2, который следует из того, что нейтрино имеет только одну возможную проекцию спина в рассмотрении [55].

Такая же формула (4.31) дифференциального сечения получается и для безпороговой реакции  $\nu_i + n \rightarrow e^- + p$ , если предполагается, что нейтрон и протон покоятся. В реакции с порогом ( $\beta^+$ -распад) область  $v_\nu \rightarrow 0$  недостижима, т.к.  $E_\nu > E_\nu^{\text{th}}$ , поэтому только реликтовые нейтрино (но не реликтовые антинейтрино) можно будет обнаружить в реакциях типа  $\nu + n \rightarrow e^- + p$ .

## 4.2 Кинематика $\nu + N \rightarrow N' + \ell$

Чтобы посчитать полное сечение, необходимо найти функцию  $p_l(\theta)$  и пределы изменения угла  $\theta$  из кинематических соотношений, и проинтегрировать по  $\theta$  формулу дифференциального сечения (4.31). Рассмотрим две частицы 1, 2. Назовем лабораторную систему отсчета такую, где частица 2 покойится

$$p_2 = (m_2, 0) \quad (4.33)$$

Инвариантная масса

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_1^0 + p_2^0)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \quad (4.34)$$

в этой системе

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + m_2)^2 - \mathbf{p}_1^2 = (E_1 + m_2)^2 - (E_1^2 - m_1^2) = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2 \quad (4.35)$$

Назовем систему центра масс такую, в которой  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$  Инвариантная масса в с.ц.м.

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_1^0 + p_2^0)^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{p})^2 = (E_1^* + E_2^*)^2 \quad (4.36)$$

$$\sqrt{s} = E_1^* + E_2^* \quad (4.37)$$

$E_i^*$  — энергия частицы  $i$  в с.ц.м.

Найдем энергию частиц в с.ц.м., для этого воспользуемся равенством

$$m_1^2 - m_2^2 = ((E_1^*)^2 - \mathbf{p}^2) - ((E_2^*)^2 - \mathbf{p}^2) = (E_1^*)^2 - (E_2^*)^2 = (E_1^* + E_2^*)(E_1^* - E_2^*) = \sqrt{s}(E_1^* - E_2^*) \quad (4.38)$$

из (4.37), (4.38) получим ( $s = (4.35)$ )

$$s + m_1^2 - m_2^2 = \sqrt{s}2E_1^* \quad (4.39)$$

$$E_1^* = \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_1^2 - m_2^2), \quad E_2^* = \frac{1}{2\sqrt{s}}(s - m_1^2 + m_2^2) \quad (4.40)$$

Рассмотрим реакцию  $\nu + N \rightarrow N' + \ell$ ; определение переданного импульса:

$$q^2 \equiv (p_\nu - p_\ell)^2 = (p_N - p_{N'})^2 \quad (4.41)$$

в лабораторной системе отсчета  $p_N = (m_N, 0)$ ,

$$(E_\nu - E_\ell)^2 - (\mathbf{p}_\nu - \mathbf{p}_\ell)^2 = (m_N - E_{N'})^2 - (0 - \mathbf{p}_{N'})^2 \quad (4.42)$$

$$m_\nu^2 + m_\ell^2 - 2E_\nu E_\ell + 2\mathbf{p}_\nu \mathbf{p}_\ell = m_N^2 + m_{N'}^2 - 2m_N E_{N'} \quad (4.43)$$

$$2\mathbf{p}_\nu \mathbf{p}_\ell = m_N^2 + m_{N'}^2 - 2m_N E_{N'} - m_\nu^2 - m_\ell^2 + 2E_\nu E_\ell \quad (4.44)$$

Учитывая, что:

$$E_{N'} = E_\nu + m_N - E_\ell, \quad s = m_\nu^2 + m_N^2 + 2E_\nu m_N, \quad (4.45)$$

получим:

$$2\mathbf{p}_\nu \mathbf{p}_\ell = m_{N'}^2 - m_\ell^2 - s + 2m_N E_\ell + 2E_\nu E_\ell \quad (4.46)$$

Связь инвариантной массы с энергией лептона в с.ц.м.:

$$2\sqrt{s}E_\ell^* = s + m_\ell^2 - m_{N'}^2, \quad (4.47)$$

Кинематическое уравнение на импульс лептона:

$$\boxed{\mathbf{p}_\nu \mathbf{p}_\ell = E_\ell(E_\nu + m_N) - \sqrt{s}E_\ell^*} \quad (4.48)$$

В формулу (4.48) входит масса конечного нуклона  $m_{N'}$  (в  $E_\ell^*$ , (4.47)). Некоторые выкладки из формулы (4.48) более подробно:

$$p_\ell \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2} \cos \theta = \sqrt{p_\ell^2 + m_\ell^2}(E_\nu + m_N) - \sqrt{s}E_\ell^* \quad (4.49)$$

$$p_\ell^2 [R + \sin^2 \theta] - 2p_\ell \sqrt{R}E_\ell^* \cos \theta - RE_\ell^{*2} = -m_\ell^2(1 + R) \quad (4.50)$$

учитывая (4.47) и

$$(E_\nu + m_N)^2 = s + E_\nu^2 - m_\nu^2 = (E_\nu^2 - m_\nu^2)(R + 1), \quad (4.51)$$

разрешив уравнение (4.48), получим модуль импульса лептона как функцию угла:

$$\boxed{p_\ell(\theta) = \frac{\sqrt{R}E_\ell^*}{R + \sin^2 \theta} \left[ \cos \theta \pm \sqrt{1 + R} \sqrt{1 - \frac{m_\ell^2}{RE_\ell^{*2}}(R + \sin^2 \theta)} \right]} \quad (4.52)$$

$$\boxed{\frac{s}{E_\nu^2 - m_\nu^2} = R = \frac{s}{v_\nu^2 E_\nu^2}} \quad (4.53)$$

Формулы существенно упростятся, если вспомнить, что масса нейтрино много меньше масс нуклонов:

$$\lim_{\frac{m_\nu}{m_N} \rightarrow 0} R = \frac{s}{E_\nu^2} = \frac{m_N}{E_\nu} \left( \frac{m_N}{E_\nu} + 2 \right), \quad \lim_{\frac{E_\nu}{m_N}, \frac{E_\nu}{m_N} \rightarrow 0} R = \infty \quad (4.54)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} p_\ell^2 = E_\ell^{*2} - m_\ell^2 \quad (4.55)$$

Энергия лептона в произвольной с.к. равна его энергии в с.п.м.,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} E_\ell^2 = E_\ell^{*2} \quad (4.56)$$

Если<sup>25</sup>

$$\sin^2 \theta < R \frac{p_\ell^{*2}}{m_\ell^2} = R \left( \frac{E_\ell^{*2}}{m_\ell^2} - 1 \right), \quad \sin \theta < \frac{\sqrt{s}p_\ell^*}{\sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2} m_\ell} \quad (4.57)$$

то  $p_\ell(\theta)$  имеет 2 действительных значения:

$$\boxed{p_\ell^\pm(\theta) = \frac{\sqrt{R}E_\ell^*}{R + \sin^2 \theta} \left[ \cos \theta \pm \sqrt{1 + R} \sqrt{1 - \frac{m_\ell^2}{RE_\ell^{*2}}(R + \sin^2 \theta)} \right]} \quad (4.58)$$

Если углы  $\theta$  такие, что выполняется неравенство:

$$\sin^2 \theta > \sin^2 \theta_1 = R \left( \frac{E_\ell^{*2}}{m_\ell^2} - 1 \right), \quad \Rightarrow \quad \cos^2 \theta < \cos^2 \theta_1 \quad (4.59)$$

то импульс лептона  $p_\ell(\theta)$  имеет одно действительное значение  $p_\ell^+(\theta)$ . Получим энергию лептона как функцию угла из уравнения (4.48):

$$\boxed{E_\ell(\theta) = \frac{\sqrt{R}E_\ell^*}{R + \sin^2 \theta} \left[ \sqrt{1 + R} \pm \cos \theta \sqrt{1 - \frac{m_\ell^2}{RE_\ell^{*2}}(R + \sin^2 \theta)} \right]} \quad (4.60)$$

<sup>25</sup>если  $\frac{E_\nu}{m_N} \rightarrow \infty$ , то  $\sin^2 \theta \leq 0$ , т.е.  $\theta \rightarrow 0$ , при  $m_\nu = 0$  получаем  $\sin \theta < \frac{\sqrt{s}p_\ell^*}{E_\nu m_\ell} = \zeta$ , [56].

Запишем  $p_\ell^\pm(\theta)$  и  $E_\ell(\theta)$  в обозначениях в таких, как в [56],

$$p_\ell^\pm(\theta) = \frac{\sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2}}{s + (E_\nu^2 - m_\nu^2) \sin^2 \theta} \left[ \sqrt{s} E_\ell^* \cos \theta \pm m_\ell (E_\nu + m_N) \sqrt{\zeta^2 - \sin^2 \theta} \right] \quad (4.61)$$

$$E_\ell^\pm(\theta) = \frac{\sqrt{s} E_\ell^* (E_\nu + m_N) \pm \cos \theta m_\ell (E_\nu^2 - m_\nu^2) \sqrt{\zeta^2 - \sin^2 \theta}}{s + (E_\nu^2 - m_\nu^2) \sin^2 \theta} \quad (4.62)$$

Связь параметра  $\zeta^2$  с параметром  $R$

$$\zeta^2 = R \left( \frac{E_\ell^{*2}}{m_\ell^2} - 1 \right) = \frac{s}{E_\nu^2 - m_\nu^2} \frac{p_\ell^{*2}}{m_\ell^2}, \quad \lim_{v_\nu \rightarrow 0} \zeta^2 = \infty \quad (4.63)$$

Удобный вид для численных вычислений (импульс и энергия, выраженные через переменные  $R$  и  $\zeta^2$ ):

$$p_\ell(\theta) = \frac{\sqrt{R} E_\ell^*}{R + \sin^2 \theta} \left[ \cos \theta \pm \sqrt{1 + R} \frac{m_\ell}{\sqrt{R} E_\ell^*} \sqrt{\zeta^2 - \sin^2 \theta} \right] \quad (4.64)$$

$$E_\ell(\theta) = \frac{\sqrt{R} E_\ell^*}{R + \sin^2 \theta} \left[ \sqrt{1 + R} \pm \cos \theta \frac{m_\ell}{\sqrt{R} E_\ell^*} \sqrt{\zeta^2 - \sin^2 \theta} \right] \quad (4.65)$$

В качестве дополнительной проверки можно показать:  $E_\ell^2 - p_\ell^2 = m_\ell^2$ .

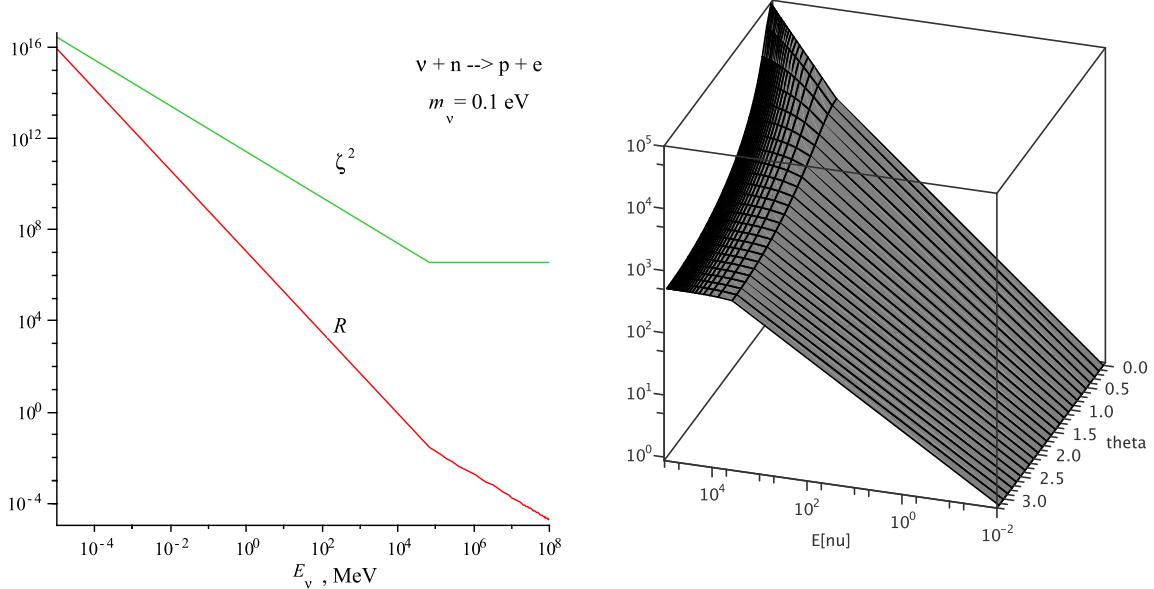


Рис. 16: Параметры  $R$  и  $\zeta^2$  для электрона.

Рис. 17: Импульс электрона в MeV (формула (4.52),  $m_e = 0.5$  MeV,  $m_\nu = 0.1$  eV), в реакции  $\nu + n \rightarrow p + \mu$  как функция угла и энергии нейтрино в MeV. Зависимость от угла существенна при энергиях выше 1 GeV.

Напомним некоторые формулы для вычисления  $R$  и  $\zeta^2$ ,

$$s = m_\nu^2 + m_N^2 + 2E_\nu m_N, \quad E_\ell^* = \frac{s + m_\ell^2 - m_{N'}^2}{2\sqrt{s}} \quad (4.47), \quad R = \frac{s}{E_\nu^2 - m_\nu^2} \quad (4.53)$$

$$\zeta^2 = R \left( \frac{E_\ell^{*2}}{m_\ell^2} - 1 \right) = \frac{s}{E_\nu^2 - m_\nu^2} \frac{p_\ell^{*2}}{m_\ell^2} \quad (4.63)$$

Рассмотрим реакцию  $\nu + n \rightarrow p + e$ .  $m_N = m_n = 938$  MeV,  $m_{N'} = m_p = 937$  MeV,  $m_\ell = m_e = 0.5$  MeV. При энергиях нейтрино в пределах

$$E_\nu = (\lesssim 1 \text{ eV})..1 \text{ GeV} \quad (4.66)$$

и предполагаем значения массы  $m_\nu = 0.01..1$  eV безразмерный параметр  $R \gg 1$ . Безразмерный параметр  $\zeta^2 \gg 1$  при любых значениях энергии нейтрино. На Рис. 16 представлена зависимость параметров  $R$  и  $\zeta^2$  от энергии нейтрино  $E_\nu$ , при массе нейтрино  $m_\nu = 0.1$  eV. В этом интервале энергий нейтрино кинематические формулы для импульса (4.52) и энергии лептона (электрона в данной реакции) (4.60) значительно упрощаются, а именно переходят в формулы (4.55), (4.56):

$$\lim_{R \rightarrow \infty} p_\ell^2 = E_\ell^{*2} - m_\ell^2, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} E_\ell^2 = E_\ell^{*2}$$

и не зависят от угла  $\theta$ .

#### 4.2.1 Реакция с порогом

Если  $(m_\nu + m_N) < (m_{N'} + m_\ell)$ , то у реакции есть порог. Найдем чему он равен. Если в формуле (4.64) для импульса лептона  $\zeta^2 - \sin^2 \theta < 0$ , это означает, что реакция не идет, т.е. энергия нейтрино ниже пороговой. При значении  $E_\nu = E_\nu^{\text{th}}$  параметр  $\zeta^2 = 0$ .

Используя определения  $\zeta^2$ ,  $E_\ell^*$ , (4.63), (4.47), получаем

$$s^{\text{th}} 2 - 2s^{\text{th}}(m_\ell^2 + m_{N'}^2) + (m_\ell^2 - m_{N'}^2)^2 = 0, \quad s^{\text{th}} = (m_\ell + m_{N'})^2 \quad (4.67)$$

Формула (4.67) является определением порога реакции. Из формулы для  $s$ , (4.45) (4.67), находится, что пороговая энергия равна

$$E_\nu^{\text{th}} = \frac{s^{\text{th}} - m_\nu^2 - m_N^2}{2m_N} = \frac{(m_\ell + m_{N'})^2 - m_\nu^2 - m_N^2}{2m_N} \quad (4.68)$$

Согласно закону сохранения импульса справедлива следующая формула:

$$2E_\nu m_N + m_N^2 + m_\nu^2 = m_{N'}^2 + m_\ell^2 + 2E_{N'} E_\ell \quad (4.69)$$

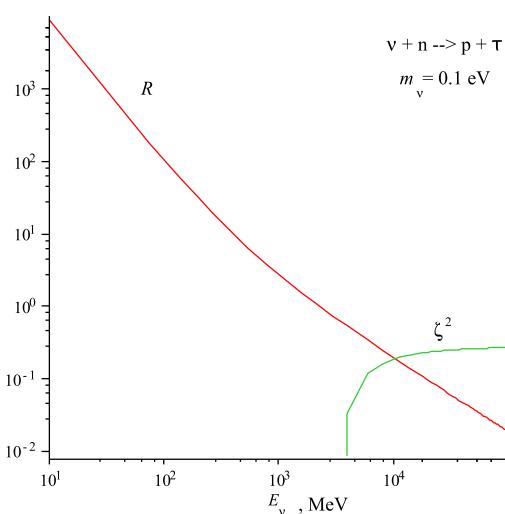


Рис. 20: Параметры  $R$  и  $\zeta^2$  для  $\tau$ -лептона.

Таким образом формула (4.68) получается из (4.69), если  $E_{N'} = m_{N'}$  и  $E_\ell = m_\ell$ , т.е.  $\mathbf{p}_{N'} = \mathbf{p}_\ell = 0$ .

При энергиях нейтрино очень близких к пороговой, когда  $0 < \zeta^2 < 1$ , возникает ограничение на угол вылета лептона:

$$\sin^2 \theta \leq \zeta^2 \equiv \sin^2 \theta_m \quad (4.70)$$

Для реакции  $\nu + n \rightarrow p + \mu$ ,  $m_\mu = 105$  MeV, график  $R$ ,  $\zeta^2$  изображен на Рис. 18.

Скачок параметров  $\zeta^2$  для  $\mu$ - и  $\tau$ -лептонов, Рис. 18,20, обусловлен наличием порога у этих реакций.

На Рис. 20 видно, что в случае  $\tau$ -лептона, параметр  $\zeta^2$  всегда  $< 1$ , и поэтому для импульса  $\tau$ -лептона всегда два решения  $p_\tau = p_\tau^\pm$ , и вследствие этого возникает кинематическое ограничение на угол  $\theta$ .

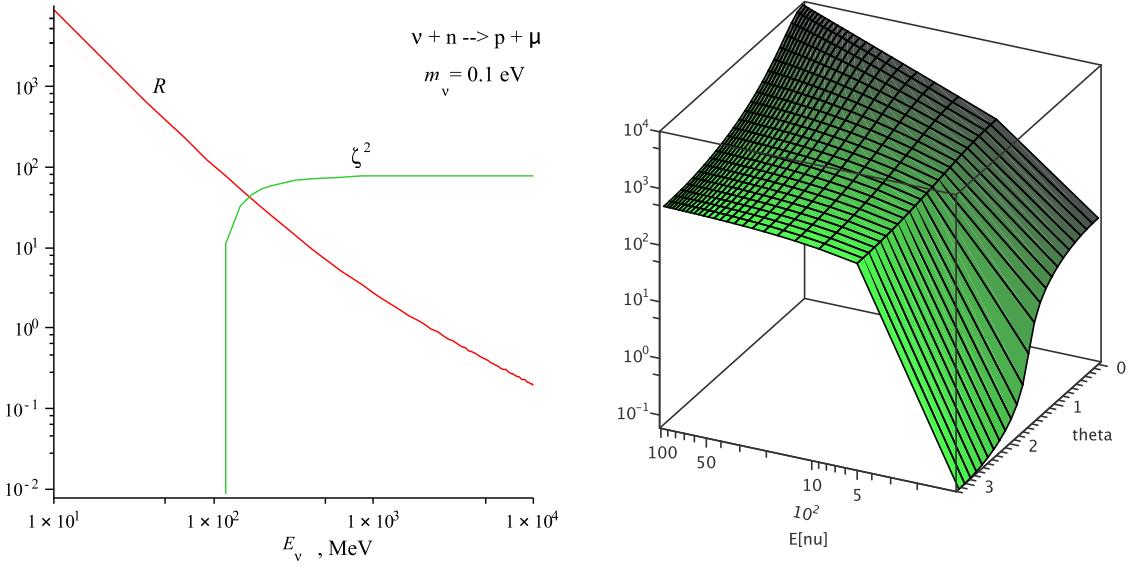


Рис. 18: Параметры  $R$  и  $\zeta^2$  для мюона.

Рис. 19: Импульс мюона (формула (4.52),  $m_\mu = 105$  MeV,  $m_\nu = 0.1$  eV) в MeV, в реакции  $\nu + n \rightarrow p + \mu$  как функция угла и энергии нейтрино в MeV. Виден порог реакции около  $E_\nu = 1.105 \cdot 10^2$  MeV. Зависимость от угла существенна при энергиях равной пороговой и выше 10 GeV.

### 4.3 Полное сечение рассеяния

Полное сечение имеет вид

$$\sigma = \int_{-1}^1 \frac{d\sigma}{d \cos \theta} (p_l^+(\theta)) d \cos \theta , \quad \text{если } \zeta > 1 . \quad (4.71)$$

$$\sigma = \left( \int_{\theta_l}^0 + \int_{\pi}^{\pi - \theta_l} \right) \left( \frac{d\sigma}{d \cos \theta} (p_l^+(\theta)) + \frac{d\sigma}{d \cos \theta} (p_l^-(\theta)) \right) (- \sin \theta d\theta) , \quad \text{если } \zeta^2 < 1 , \quad (4.72)$$

$$\sin^2 \theta_m = \zeta^2 . \quad (4.73)$$

В дифференциальном сечении (4.31) существует расходимость  $1/v_\nu$ . Рассмотрим предел, с учетом  $\frac{s}{E_\nu^2 - m_\nu^2} = R = \frac{s}{v_\nu^2 E_\nu^2}$  если  $R \rightarrow \infty$  — это означает  $v_\nu \rightarrow 0$ :

$$\lim_{v_\nu \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{d \cos \theta} (p_l^\pm(\theta)) \sim \pm \frac{1}{v_\nu} = \pm \infty \quad (4.74)$$

скорость  $v_\nu \rightarrow 0$  возможна, если у нейтрино есть масса  $m_\nu \neq 0$ .

Рассмотрим два случая для нейтрона(протона) в реакции рассеяния антинейтрино(нейтрино) на неподвижном протоне(нейтроне).

*2-ой нуклон  $N'$  покоятся:*

Получим полное сечение  $\sigma$  с предположением покоя 2-го нуклона, используя формулу (4.31):

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \bar{G}^2 \frac{1}{2\pi v_\nu} |\mathbf{p}_e| E_e [1 + 3\lambda^2 + (1 - \lambda^2)v_e v_\nu \cos \theta]$$

т.е. (4.52), (4.31)  $\rightarrow$  (4.71) =  $\sigma_i$

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}(p_l^+(\theta)) = \bar{G}^2 \frac{1}{2\pi v_\nu} \left( \frac{\sqrt{R}E_l^*}{R + \sin^2\theta} \left[ \cos\theta + \sqrt{1+R} \sqrt{1 - \frac{m_l^2}{RE_l^{*2}}(R + \sin^2\theta)} \right] \right) \cdot E_l [1 + 3\lambda^2 + (1 - \lambda^2)v_lv_\nu \cos\theta] \quad (4.75)$$

Возникают такие типы интегралов:

$$\int \frac{\cos\theta}{R + \sin^2\theta} [a + b\cos\theta] d\cos\theta, \quad \int \frac{1}{R + \sin^2\theta} \sqrt{c - d\sin^2\theta} [a + b\cos\theta] d\cos\theta \quad (4.76)$$

С очень хорошей точностью при энергиях нейтрино  $E_\nu = 10^{-1}..10^9$  еВ и массах нейтрино  $m_\nu = 10^{-2}$  еВ можно пользоваться формулой (4.31)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \bar{G}^2 \frac{1}{2\pi v_\nu} |\mathbf{p}_e| E_e [1 + 3\lambda^2 + (1 - \lambda^2)v_e v_\nu \cos\theta] \\ &\quad \nu + N(\text{rest}) \rightarrow N'(\text{rest}) + e \\ p_\ell(\theta) &= p_\ell^+(\theta) \rightarrow p_\ell^* = \sqrt{E_\ell^{*2}}, \quad E_\ell(\theta) = E_\ell^+(\theta) \rightarrow E_\ell^* = \frac{s + m_\ell^2 - m_p^2}{2\sqrt{s}} \end{aligned} \quad (4.77)$$

поэтому при вычислениях получается только интеграл вида

$$\sigma \sim \int_{-1}^1 (a + b\cos\theta) d\cos\theta = 2a. \quad (4.78)$$

Рассмотрим реакцию (4.1)  $\nu_i + n \rightarrow e^- + p$ ; при энергиях нейтрино до 1 ГэВ (реально до 100 МэВ), см. (4.66):

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \bar{G}^2 \frac{E_\nu}{2\pi \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2}} \sqrt{E_e^{*2} - m_e^2} E_e^* \left[ 1 + 3\lambda^2 + (1 - \lambda^2) \frac{\sqrt{E_e^{*2} - m_e^2}}{E_e^*} \frac{\sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2}}{E_\nu} \cos\theta \right] \quad (4.79)$$

$E_e^*$  — энергия электрона в с.ц.м. (4.47),  $s$  — инвариантная масса (4.45):

$$E_e^* = \frac{s + m_e^2 - m_p^2}{2\sqrt{s}}, \quad s = m_\nu^2 + m_n^2 + 2E_\nu m_n \quad (4.80)$$

Проинтегрируем по  $\theta = 0.. \pi$ ,

$$\sigma = \bar{G}^2 \frac{E_\nu}{2\pi \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2}} \sqrt{E_e^{*2} - m_e^2} E_e^* (1 + 3\lambda^2) \cdot 2 \quad (4.81)$$

Переход от размерности [еВ<sup>2</sup>] к размерности [м<sup>2</sup>]:

$$\hbar = [\text{еV} \cdot \text{s}], \quad [\text{m}] = c \cdot [\text{s}] = c \cdot \frac{\hbar}{[\text{еV}]}, \quad [\text{m}^2] = \frac{(\hbar c)^2}{[\text{еV}^2]} \quad (4.82)$$

$$\sigma(\text{m}^2) = \sigma(\text{MeV}^{-2}) \cdot (\hbar c)^2 \quad (4.83)$$

На Рис. 21 представлено полное сечение (4.81) в см<sup>2</sup> как функция энергии нейтрино в еВ. При более высоких энергиях нейтрино  $E_\nu > 1$  ГэВ необходимо учитывать точное решение для  $p_e$ ,  $E_e$ , (4.52), (4.60), формулу для дифференциального сечения (4.97), и точную вершину взаимодействия.

Для реликтовых нейтрино сечение возрастает примерно на один порядок из-за фактора  $1/v_\nu$ .

$$E_{\nu \text{ relic}} = \sqrt{|\mathbf{p}_\nu|^2 + m_\nu^2} = m_\nu \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{p}_\nu|^2}{m_\nu^2}} = m_\nu \left( 1 + \frac{|\mathbf{p}_\nu|^2}{2m_\nu^2} + O(\frac{|\mathbf{p}_\nu|^2}{m_\nu^2}) \right) \quad (4.84)$$

при  $m_\nu \gg 10^{-4}$  eV,

$$E_{\text{kin}} = E_\nu - m_\nu = \frac{|\mathbf{p}_\nu|^2}{2m_\nu} \approx 10^{-4} \text{ eV}, \quad v_{\nu \text{ relic}} \approx \sqrt{\frac{2E_{\text{kin}}}{m_\nu}} \quad (4.85)$$

Например, как в приведенных выше вычислениях  $m_\nu = 0.1$  eV, тогда  $v_{\nu \text{ relic}} \approx 4.5 \cdot 10^{-2} c$ .

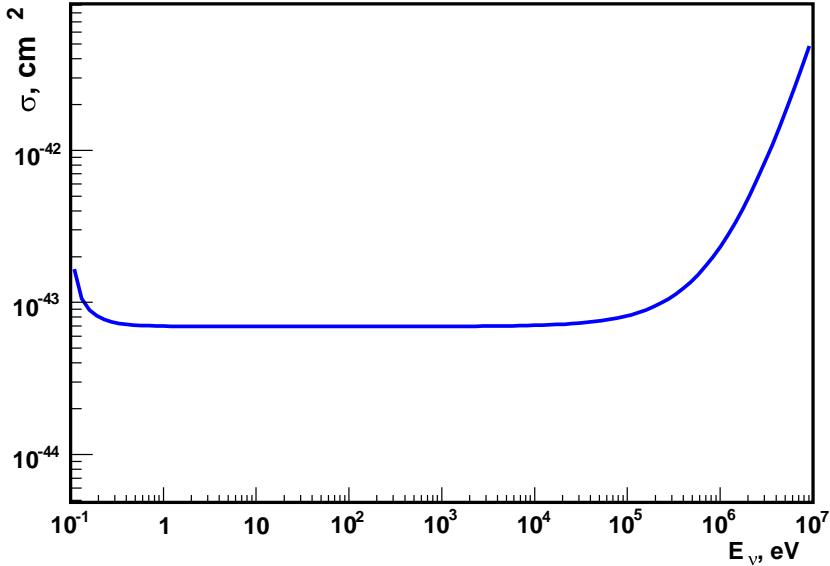


Рис. 21: Полное сечение рассеяния  $\sigma$  в см $^2$  как функция энергии нейтрино  $E_\nu$  в еВ.

#### 4.4 Реакция $\nu_i + n \rightarrow e^- + p$ , учитывая импульс протона

Здесь будем рассматривать то, что относится к этой безпороговой реакции без учета покоя конечного нуклона (протона).

Запишем  $|\mathcal{M}|^2$ , (4.25)

$$\sum_{s_n, s_p, s_e, s_\nu} |\mathcal{M}|^2 = 2\bar{G}^2 32 [(1+\lambda)^2(p_n p_e)(p_p p_\nu) + (1-\lambda)^2(p_n p_\nu)(p_p p_e) - (1-\lambda^2)m_p m_n(p_e p_\nu)]$$

Будем полагать, что нейтрон поконится  $p_n = (m_n, 0)$  — лабораторная система отсчета.

$$\sum_{s_n, s_p, s_e, s_\nu} |\mathcal{M}|^2 = 2\bar{G}^2 32 m_n [(1+\lambda)^2 E_e(p_p p_\nu) + (1-\lambda)^2 E_\nu(p_p p_e) - (1-\lambda^2)m_p(p_e p_\nu)] \quad (4.86)$$

Используя формулу дифференциального сечения (4.28), с учетом покоя только нейтрана, получим формулу

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^3(\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_e - \mathbf{p}_\nu) \delta(m_n + E_\nu - E_p - E_e)}{4m_n E_\nu v_\nu} \frac{1}{4} \sum_s |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 p_p}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3 2E_e},$$

Снимем интегрирование по  $\mathbf{p}_p$

$$\mathbf{p}_p = \mathbf{p}_\nu - \mathbf{p}_e, \quad (4.87)$$

$$E_p = \sqrt{\mathbf{p}_p^2 + m_p^2} = \sqrt{\mathbf{p}_e^2 + \mathbf{p}_\nu^2 - 2\mathbf{p}_e \mathbf{p}_\nu + m_p^2} = \sqrt{E_e^2 - m_e^2 + E_\nu^2 - m_\nu^2 - 2\mathbf{p}_e \mathbf{p}_\nu + m_p^2}, \quad (4.88)$$

Получается следующее выражение

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\bar{G}^2 \delta(m_n + E_\nu - E_p - E_e)}{(2\pi)^2 m_n E_\nu v_\nu E_p E_e} m_n [(1+\lambda)^2 E_e(p_p p_\nu) + (1-\lambda)^2 E_\nu(p_p p_e) - (1-\lambda^2)m_p(p_e p_\nu)] d^3 p_e = \\ &= \frac{\bar{G}^2 \delta(m_n + E_\nu - E_p - E_e)}{(2\pi)^2 m_n E_\nu v_\nu E_p E_e} m_n [(1+\lambda)^2 E_e(E_p E_\nu + \mathbf{p}_e \mathbf{p}_\nu) + (1-\lambda)^2 E_\nu(E_p E_e - \mathbf{p}_e \mathbf{p}_\nu) - \\ &\quad - (1-\lambda^2)m_p(E_e E_\nu - \mathbf{p}_e \mathbf{p}_\nu)] |\mathbf{p}_e| E_e dE_e d\cos\theta d\varphi = \\ &= \frac{\bar{G}^2 \delta(m_n + E_\nu - E_p - E_e)}{(2\pi) E_\nu v_\nu E_p} [(1+\lambda)^2 E_e(E_p E_\nu + \mathbf{p}_e \mathbf{p}_\nu) + (1-\lambda)^2 E_\nu(E_p E_e - \mathbf{p}_e \mathbf{p}_\nu) - \\ &\quad - (1-\lambda^2)m_p(E_e E_\nu - \mathbf{p}_e \mathbf{p}_\nu)] |\mathbf{p}_e| dE_e d\cos\theta \quad (4.89) \end{aligned}$$

для выражения скалярного произведения  $\mathbf{p}_e \mathbf{p}_\nu$  можно использовать кинематическую формулу (4.48)  $\mathbf{p}_\nu \mathbf{p}_l = E_l(E_\nu + m_N) - \sqrt{s} E_l^*$

$$\mathbf{p}_\nu \mathbf{p}_e = E_e(E_\nu + m_n) - \sqrt{s} E_e^* \quad (4.90)$$

$$2\sqrt{s} E_e^* = s + m_e^2 - m_p^2, \quad s = m_\nu^2 + m_n^2 + 2E_\nu m_n. \quad (4.91)$$

Из этого уравнения (4.90) определяется  $E_e$  и  $|\mathbf{p}_e| = \sqrt{E_e^2 - m_e^2}$ , формулы (4.62) и (4.61).

$$p_e^\pm(\theta) = \frac{\sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2}}{s + (E_\nu^2 - m_\nu^2) \sin^2\theta} \left[ \sqrt{s} E_e^* \cos\theta \pm m_e(E_\nu + m_n) \sqrt{\zeta^2 - \sin^2\theta} \right] \quad (4.92)$$

$$E_e^\pm(\theta) = \frac{\sqrt{s} E_e^*(E_\nu + m_n) \pm \cos\theta m_e(E_\nu^2 - m_\nu^2) \sqrt{\zeta^2 - \sin^2\theta}}{s + (E_\nu^2 - m_\nu^2) \sin^2\theta} \quad (4.93)$$

параметр  $\zeta$ , формула (4.63),

$$\zeta^2 = \frac{s}{E_\nu^2 - m_\nu^2} \left( \frac{E_e^*}{m_e^2} - 1 \right) = \frac{s}{E_\nu^2 - m_\nu^2} \frac{{p_e^*}^2}{m_e^2} \quad (4.94)$$

Можно проверить, что аргумент  $m_n + E_\nu - E_p - E_e = 0$   $\delta$ -функции — это тождество:

$$E_e = m_n + E_\nu - \sqrt{E_e^2 - m_e^2 + E_\nu^2 - m_\nu^2 - 2(E_e(E_\nu + m_n) - \sqrt{s}E_e^*) + m_p^2} \quad (4.95)$$

$$E_p = \sqrt{E_e^2 - m_e^2 + E_\nu^2 - m_\nu^2 - 2(E_e(E_\nu + m_n) - \sqrt{s}E_e^*) + m_p^2} \quad (4.96)$$

Тогда интегрирование по  $E_e$  можно снять, учитывая что  $E_e$  и  $|\mathbf{p}_e|$  определяются из формул (4.92) и (4.93), а  $E_p$  из формулы (4.96),

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\bar{G}^2}{2\pi E_\nu v_\nu E_p} [(1+\lambda)^2 E_e(E_p E_\nu + \mathbf{p}_e \mathbf{p}_\nu) + (1-\lambda)^2 E_\nu(E_p E_e - \mathbf{p}_e \mathbf{p}_\nu) - \\ &\quad - (1-\lambda^2)m_p(E_e E_\nu - \mathbf{p}_e \mathbf{p}_\nu)] |\mathbf{p}_e| d\cos\theta = \\ &= \frac{\bar{G}^2}{2\pi E_\nu v_\nu E_p} [(1+\lambda)^2 E_e(E_p E_\nu + (E_e(E_\nu + m_n) - \sqrt{s}E_e^*)) + (1-\lambda)^2 E_\nu(E_p E_e - (E_e(E_\nu + m_n) - \sqrt{s}E_e^*)) - \\ &\quad - (1-\lambda^2)m_p(E_e E_\nu - (E_e(E_\nu + m_n) - \sqrt{s}E_e^*))] |\mathbf{p}_e| d\cos\theta \end{aligned} \quad (4.97)$$

Нам известны  $E_e$ ,  $|\mathbf{p}_e|$ ,  $E_p$  как функции  $\cos\theta$  — формулы (4.92), (4.93), (4.96), поэтому можно проинтегрировать по  $\cos\theta$ , с учетом кинематических ограничений на  $\cos\theta$ .

Для электрона и мюона (при  $E_\nu$  существенно выше порога) всегда (см. Рис. 16, Рис. 18):

$$\zeta^2 \gg 1 \Rightarrow |\mathbf{p}_{e,\mu}| = p_{e,\mu}^+ \quad (4.98)$$

Кинематическая формула для импульса лептона (4.92) ( $e$ ,  $\mu$ ) значительно упрощается, т.к.

$$\sqrt{\zeta^2 - \sin^2\theta} \rightarrow \sqrt{\zeta^2}. \quad (4.99)$$

Полное сечение

$$\sigma = \int_{-1}^1 \frac{d\sigma}{d\cos\theta} (p_{e,\mu}^+(\theta)) d\cos\theta \quad (4.100)$$

#### 4.4.1 Энергии нейтрино $E_\nu \lesssim 100$ MeV

Аналитически проинтегрировать формулу (4.97) с учетом точной кинематики по всей видимости почти невозможно, но на самом деле это делать нет необходимости, т.к. если использовать такие  $R \gg 1$ , а значит ограничится энергиями<sup>26</sup>  $E_\nu \lesssim 100$  MeV, то (см. (4.52))

$$p_\ell(\theta) \rightarrow p_\ell^*, \quad E_\ell(\theta) \rightarrow E_\ell^*$$

Действительно из определения  $R$  и  $s$ , (4.53):

$$E_\nu = \frac{m_n}{R} + \sqrt{\frac{2m_n^2}{R} + m_\nu^2 \left( \frac{1}{R} + 1 \right)} \quad (4.101)$$

<sup>26</sup>Напомним, что наше рассмотрение с "наивными" независящими от переданного импульса адронными вершинами, работает при энергиях нейтрино  $< 1$  GeV. Замечательно, что кинематическое ограничение  $E_\nu \lesssim 100$  MeV, входит в эту область.

$$R = 10^2 \gg 1 : \quad E_\nu \approx 100 \text{ MeV} , \quad \text{если} \quad m_\nu \approx \text{eV}. \quad (4.102)$$

А значит, наше рассмотрение будет нормально только для реакции  $\nu + n \rightarrow p + e$  и пороговой реакции(выше порога)  $\bar{\nu} + p \rightarrow e^+ + n$  с энергиями  $E_\nu \lesssim 100 \text{ MeV}$ .

В этом предположении можно получить полное сечение из уравнения (4.97), (теперь энергия протона (4.96) тоже не зависит от угла)

$$\sigma = \frac{\bar{G}^2}{2\pi E_\nu v_\nu E_p} [(1+\lambda)^2 E_e^*(E_p E_\nu) + (1-\lambda)^2 E_\nu(E_p E_e^*) - (1-\lambda^2)m_p(E_e^* E_\nu)] |\mathbf{p}_e^*| \cdot 2$$

$$\sigma = \frac{\bar{G}^2}{\pi v_\nu} E_e^* \sqrt{E_e^{*2} - m_e^2} \left[ 2 + 2\lambda^2 - (1-\lambda^2) \frac{m_p}{E_p} \right] \quad (4.103)$$

Если  $E_p = m_p$ , то получим формулу (4.81).

Построим график  $E_p(E_\nu, E_e = E_e^*)$  (4.96), чтобы понять насколько существенна поправка  $\frac{m_p}{E_p}$  в уравнении (4.103), Рис. 22.

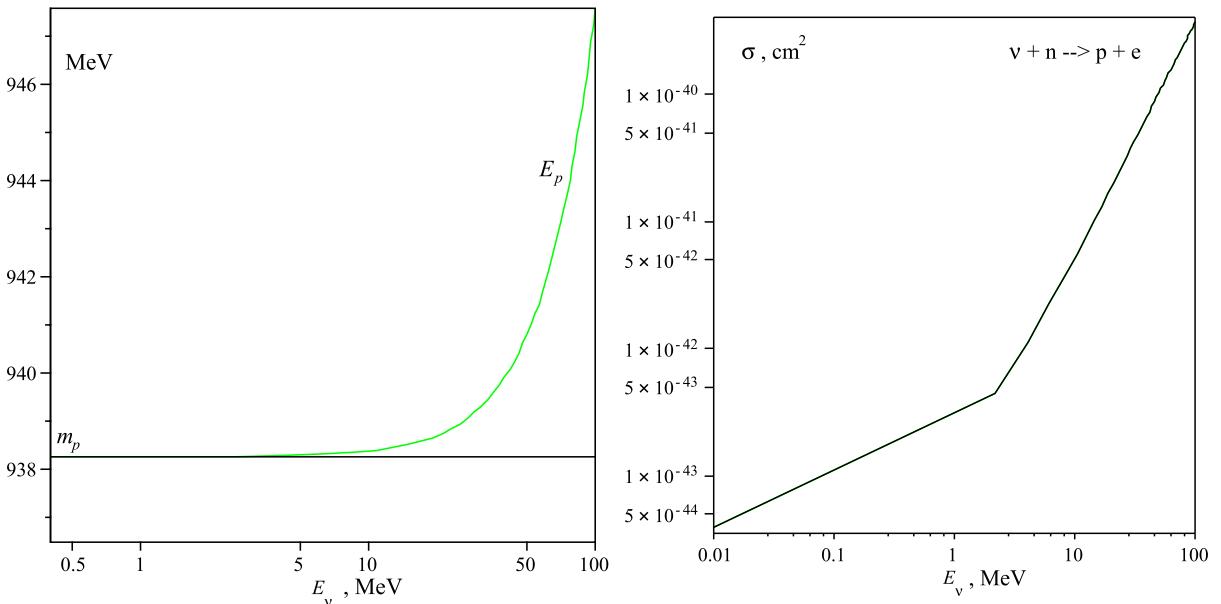


Рис. 22: Энергия протона как функция энергии нейтрино в предположении  $R \gg 1$ , т.е.  $E_e = E_e^*$ .

Рис. 23: Графики сечений для двух случаев  $E_p = m_p$  и  $E_p = E_p(E_\nu)|_{E_e=E_e^*}$  полностью перекрываются. (излом на графике сечения связан с численными вычислениями)

Проверено при построении трехмерных аналогичных графиков сечения в зависимости от массы и энергии нейтрино, что вариации массы нейтрино в допустимых пределах  $m_\nu \lesssim 1 \text{ eV}$  не приводят к видимому уширению графиков. Поэтому не пишется при каком значении массы нейтрино построены графики (обычно полагая  $m_\nu = 0.1 \text{ eV}$ ), кроме специальных случаев, когда  $E_\nu \rightarrow m_\nu$ .

#### 4.5 Некогерентная сумма сечений $\sigma_i$

Реакции с массивными реликточескими нейтрино независимы, поэтому сечение является суммой сечений рассеяния отдельного массивного нейтрино сорта  $i$ .

$$\begin{pmatrix} e \\ \nu_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (4.104)$$

Независимы 3 реакции (4.1):  $\nu_i + n \rightarrow e^- + p$ ; но только, если длина когерентности меньше расстояния между волновыми пакетами описывающих массивные нейтрино, можно складывать вероятности, а не амплитуды процессов (интерференционные слагаемые равны нулю), это также отражено в работе [57]. Понятие некогерентной суммы вероятностей имеет смысл, соответственно также как и некогерентная сумма сечений.

Матричный элемент  $i$ -ой реакции имеет вид (ср. с (4.3), нет суммы по  $i$ )

$$\mathcal{M}_i = \bar{G} \bar{p} \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) n \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) V_{ei} \nu_i \quad (4.105)$$

Квадрат матричного элемента, (4.25),

$$\begin{aligned} \sum_s |\mathcal{M}_i|^2 &= \\ &= 2\bar{G}^2 32 [(1 - \lambda)^2 (p_n p_e) (p_p p_{\nu_i}) + (1 + \lambda)^2 (p_n p_{\nu_i}) (p_p p_e) - (1 - \lambda^2) m_p m_n (p_e p_{\nu_i})] |V_{ei}|^2 \end{aligned} \quad (4.106)$$

В лабораторной системе отсчета  $p_n = (m_n, 0)$ :

$$\begin{aligned} \sum_s |\mathcal{M}_i|^2 &= \\ &= 2\bar{G}^2 32 m_n [(1 - \lambda)^2 E_e (p_p p_{\nu_i}) + (1 + \lambda)^2 E_{\nu_i} (p_p p_e) - (1 - \lambda^2) m_p (p_e p_{\nu_i})] |V_{ei}|^2 \end{aligned} \quad (4.107)$$

Сечение рассеяния для  $i$ -ой реакции, см. формула (4.103) с соответствующими предположениями (а именно, в итоге, для энергий нейтрино  $E_\nu \lesssim 100$  MeV),

$$\sigma_i = \frac{\bar{G}^2}{\pi v_{\nu_i}} E_e^* \sqrt{E_e^{*2} - m_e^2} [2 + 2\lambda^2 - (1 - \lambda^2) \frac{m_p}{E_p}] |V_{ei}|^2 \quad (4.108)$$

Тогда полное сечение трех реакций имеет вид

$$\sigma = \sum_{i=1,2,3} \sigma_i = \frac{\bar{G}^2}{\pi} E_e^* \sqrt{E_e^{*2} - m_e^2} [2 + 2\lambda^2 - (1 - \lambda^2) \frac{m_p}{E_p}] \sum_i \frac{1}{v_i} |V_{ei}|^2 \quad (4.109)$$

Это и есть некогерентная сумма сечений  $\sigma_i$ . Теперь необходимо проанализировать в каких пределах меняется эта сумма при экспериментально дозволенных углах смешивания и массах нейтрино  $\sum_i m_i < (0.4 - 1.0)$  eV, [58].

Значения допустимых сегодняшними экспериментами [59] углов смешивания:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{12} &= 0.314(1^{+0.18}_{-0.15}) \\ \sin^2 \theta_{23} &= 0.45(1^{+0.35}_{-0.20}) \\ \sin^2 \theta_{13} &= 0.8(1^{+2.3}_{-0.8}) 10^{-2} \end{aligned} \Rightarrow \tilde{V}_{s_{13}=0}^{PMNS} \approx \begin{pmatrix} 0,83 & 0,54 & 0 \\ -0,4 & 0,61 & 0,67 \\ 0,43 & 0,55 & 0,74 \end{pmatrix} \quad (4.110)$$

На Рис. 24 приведены графики сечений  $\sigma_i$  согласно уравнению (4.108) с учетом изменения углов смешивания в допустимых пределах (4.110), и изменения масс нейтрино  $m_{\nu_i}$  в пределах 0.01..1 eV. Уширение за счет разброса углов смешивания видно только при очень сильном увеличении, Рис. 25. Уширение за счет разброса масс существенно только при энергиях близких к массе.

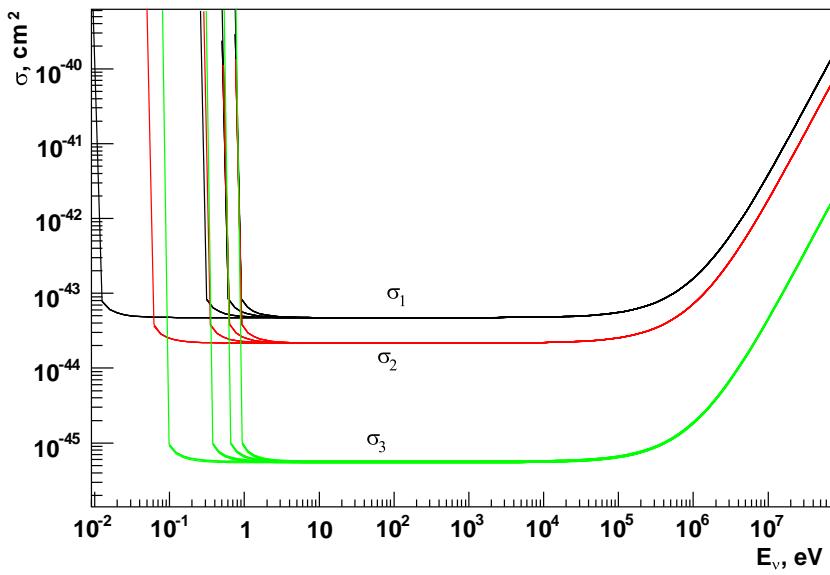


Рис. 24: Сечения рассеяния  $\nu_i n \rightarrow p e$ ,  $\sigma_1$  — верхние кривые,  $\sigma_2$  — средние,  $\sigma_3$  — нижние.

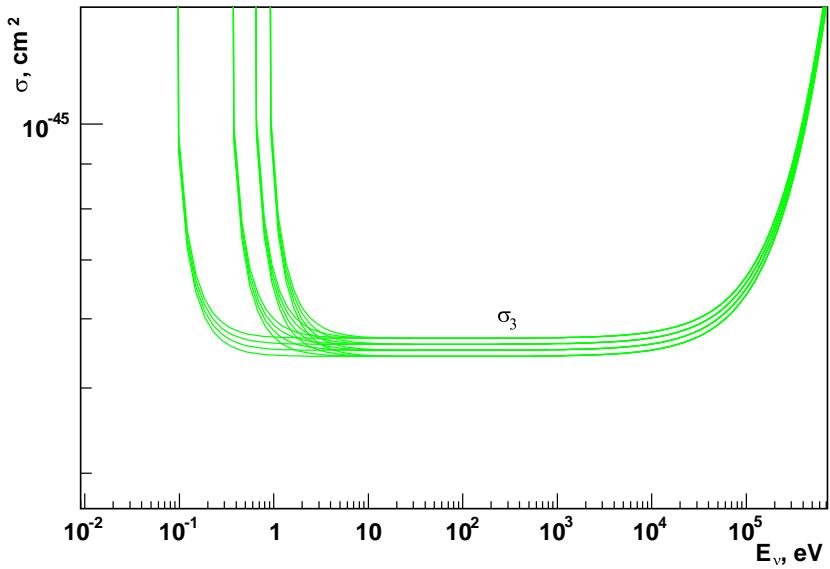


Рис. 25: “увеличенный” график сечения  $\sigma_3$

#### 4.6 Скорость счета числа событий

Классическое определение числа столкновений  $N = n(\sigma v T)$ ;  $\sigma v T$  — объем цилиндра,  $\sigma = \pi r^2$ ,  $n$  — концентрация, число частиц в единице объема. В лабораторной системе отсчета,  $v$  — скорость налетающих частиц на мишени. Скорость счета — число столкновений в единицу времени  $T$ :

$$R = \frac{N}{T} = n\sigma v \quad (4.111)$$

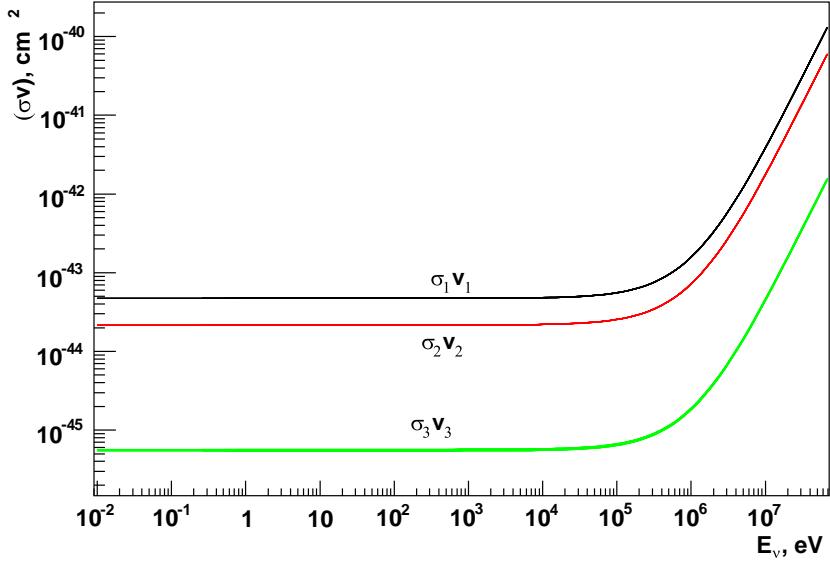


Рис. 26: Графики сечений  $\sigma_i \cdot v_{\nu_i}$ .

Зная найденное произведение сечения на скорость Рис. 26 (ср. с формулой (20) из обзора [62]), получим скорость счета реликтовых нейтрино:

$$R_{relic} = \frac{112}{2} \text{cm}^{-3} (\sim 10^{-43}) \text{cm}^2 c \approx 10^{-31} \text{s}^{-1} \quad (4.112)$$

Формула (4.112) находится в согласии с формулой (18) из работы [55].

$$\text{year} = 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{s} = 31536000 \text{s} \approx \pi \cdot 10^7 \text{s}$$

$$R_{relic} \approx 10^{-31} \cdot 10^7 \text{year}^{-1} \quad (4.113)$$

Если концентрация и сечение являются функциями энергии и изотропно зависят от скорости, то скорость счета принимает вид (см. также [62])

$$R = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} n \sigma(p) \frac{p}{E} \quad (4.114)$$

$n$  — функция распределения по энергии (Ферми-Дирака для фермионов). Если  $N$ ,  $\sigma$  мало зависят от энергии, то получаем

$$R = \frac{N}{T} = n \sigma \langle v \rangle \quad (4.115)$$

Определение дифференциального сечения рассеяния, [44],  $d\sigma \equiv \frac{dw}{j}$ ,  $dw$  — дифференциальная вероятность рассеяния в единицу времени,  $j$  — поток сталкивающихся частиц,

$$dw = \frac{1}{\delta t} |A|^2 \prod \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3}, \quad j = \frac{N}{\sigma T} \quad (4.116)$$

Скорость счета:

$$R = \frac{N}{T} = \sigma j = \int \frac{1}{\delta t} |A|^2 \prod \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \quad (4.117)$$

#### 4.6.1 Реликтоные нейтрино

Функция распределения Ферми-Дирака

$$n = \frac{1}{e^{\frac{(E-\mu)}{kT}} + 1} \quad (4.118)$$

Энергия Ферми, и химический потенциал (при температурах  $\theta \ll \mathcal{E}_F$ , [60]),

$$\mathcal{E}_F = p_F c = \hbar c \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \mu = \mathcal{E}_F \left( 1 - \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{\theta}{\mathcal{E}_F} \right)^2 + \dots \right). \quad (4.119)$$

Для реликтоных нейтрино  $\theta \sim \mathcal{E}_F$ ,

$$\mathcal{E}_{F,\nu+\bar{\nu}} = p_F c = \hbar c \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ eV} \quad (4.120)$$

Температура газа реликтоных нейтрино  $T_0 = 1.947$  К. Плотность числа релятивистских частиц как функция температуры

$$n = \frac{3}{4} \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (4.121)$$

$\zeta$  — функция Римана,  $\zeta(3) = 1.20206$ . Плотность реликтоных нейтрино+антинейтрино на каждый флэйвор, [50],

$$n_{\nu+\bar{\nu}} = 112 \text{ cm}^{-3} \quad (4.122)$$

$\mu/T_\nu \leq 0.1$ , [62] для релятивистских нейтрино. Это означает что распределение принимает вид

$$n = \frac{1}{e^{\frac{(E)}{kT}} + 1} \quad (4.123)$$

[50] плотность энергии безмассовых фермионов:

$$\rho = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{p}{e^{\frac{E}{kT}} + 1} = \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{15} T^4 \quad (4.124)$$

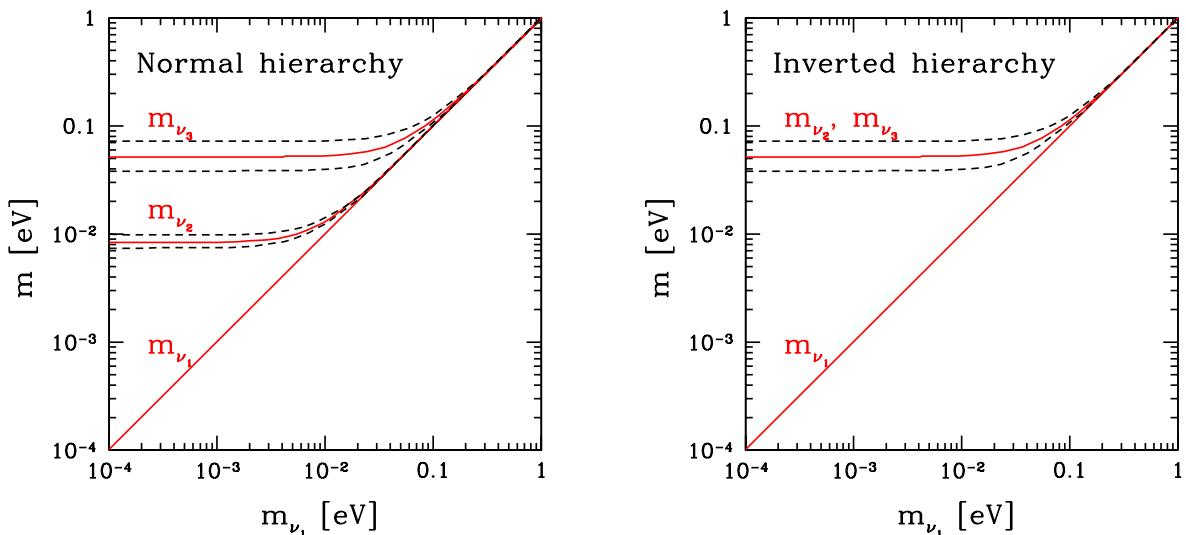


Рис. 27: Массы нейтрино в зависимости от массы легчайшего нейтрино [64], нормальная иерархия показана слева, обратная иерархия — справа, [65].

Скорость счета должна быть такого вида

$$R = \sigma_0 \sum_i \langle n_i \rangle x_i |V_{ei}|^2 = \sigma_0 \langle n \rangle \sum_i x_i |V_{ei}|^2 \quad (4.125)$$

$\langle n_i \rangle = \langle n \rangle = 56 \text{ cm}^{-3}$ ,  $x_i = n_i / \langle n_i \rangle$  — коэффициент усиления за счет гравитационной кластеризации нейтрино вблизи центра галактик (и других массивных объектов, например, черных дыр [66]). На графиках Рис. 29, 28 из работы [65] приведены значения этого коэффициента как функции расстояния от центра Галактики при различных массах нейтрино, из решения уравнения Власова (уравнение Больцмана без взаимодействия). Полезные сведения приведены в таблице 2 в обзоре [65].

Т.е. если массы нейтрино могут (Рис. 27) существенно отличаться, то должно быть и концентрации массивных реликтовых нейтрино различные. Отношение  $x(0.6)/x(0.15) \approx 10$  Рис. 29. А в итоге скорость счета  $\sim \sum_i x_i |V_{ei}|^2$  зависит от иерархии масс нейтрино.

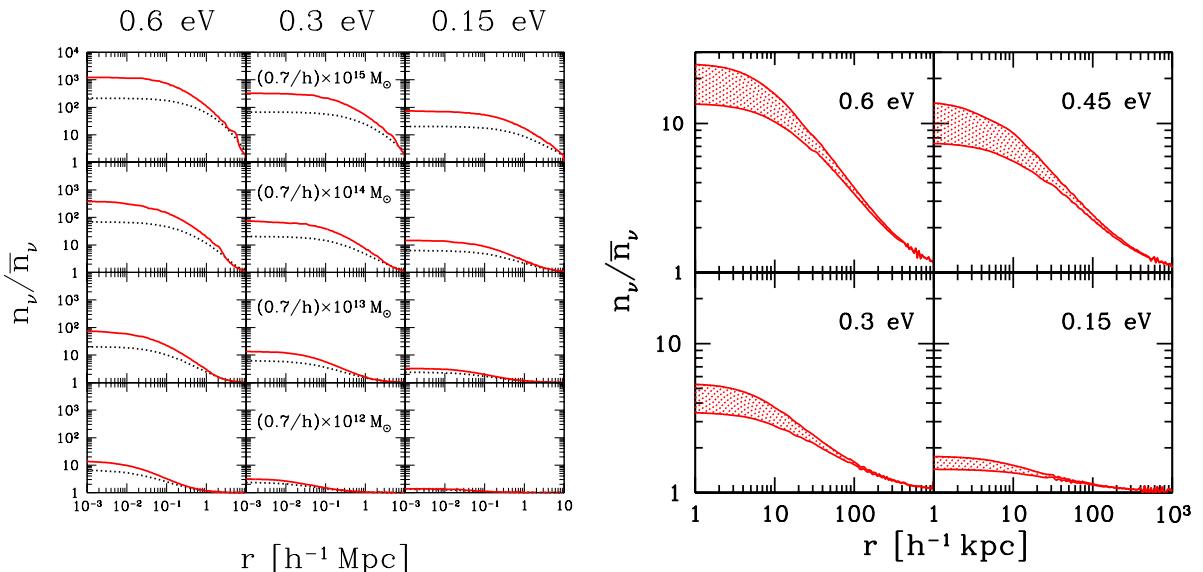


Рис. 28:  $x$ , при различных массах гало,  $M_\odot$  — масса Солнца,  $h = (0.71 \pm 0.07) \times 1.15_{0.95}$  — сегодняшнее значение нормированного параметра Хаббла расширения Вселенной, [65].

Рис. 29: значения  $x$  в нашей Галактике, [65].

Реликтовые нейтрино  $\nu_2$ ,  $\nu_3$  при любом возможном виде иерархий нерелятивистские ( $m_{\nu_2}, \nu_3 \gg \sim 10^{-4} \text{ eV}$ ) могут быть значительно "подвержены" эффекту кластеризации, но только если  $m_{\nu_1} > 0.3..0.4 \text{ eV}$ , Рис. 29.

Согласно графикам Рис. 27 если  $m_{\nu_1} < 0.1 \text{ eV}$  то  $m_{\nu_2}, \nu_3 < \approx 0.1 \text{ eV}$ , а это значит, что коэффициент усиления  $x_i \approx 1$  вне зависимости от иерархии (нормальной или обратной). Скорость счета

$$R = \sigma_0 \langle n \rangle \quad (4.126)$$

Тогда рассмотрим  $m_{\nu_1} > 0.3..0.4 \text{ eV}$  ( $x$  может быть в этом случае  $\gg 1$ ), но тогда  $m_{\nu_1} \approx m_{\nu_2} \approx m_{\nu_3}$  (см. Рис. 27), т.е.  $x_1 \approx x_2 \approx x_3 = x$ . И тогда скорость счета

$$R = \sigma_0 (\langle n \rangle x) \sum_i |V_{ei}|^2 = \sigma_0 (\langle n \rangle x) \quad (4.127)$$

Формула (4.127) с рассмотренными выше предположениями совпадает с результатом работы [55]. Также скорость счета событий рассеяния реликтовых нейтрино ядрах трития сильно зависит от значения угла смешивания  $\theta_{13}$  и разрешения детектора [67]. Показано [67], что если реликтовые нейтрино являются полностью не смешанными и имеют нормальную иерархию, и разрешение детектора по энергии имеет порядок  $8 \cdot 10^{-3}$  eV, то возможное число событий в тритиевом эксперименте может быть на порядок больше величины, предлагающей в [55], и равняться  $10^3$  событий в год.

Т.к. эффект от гравитационной кластеризации нейтрино скорее всего несущественен в солнечно-земных экспериментах, поэтому можно считать, что скорость счета (4.112) имеет вид

$$R = \sigma_0 \sum_i \langle n_i \rangle |V_{ei}|^2 \quad (4.128)$$

Если  $\langle n_1 \rangle = 56 \text{ cm}^{-3}$ , что может (но не обязательно должно) отвечать случаю, если 1-ое нейтрино легчайшее (нормальная иерархия), тогда

$$R_{norm} = \sigma_0 \langle n_1 \rangle \left( |V_{e1}|^2 + \frac{\langle n_2 \rangle}{\langle n_1 \rangle} |V_{e2}|^2 + \frac{\langle n_3 \rangle}{\langle n_1 \rangle} |V_{e3}|^2 \right) \quad (4.129)$$

При обратной иерархии 3-е нейтрино  $\nu_3$  является легчайшим, и полагаем, что средняя концентрация  $\langle n_3 \rangle = 56 \text{ cm}^{-3}$ , тогда

$$R_{inv} = \sigma_0 \langle n_3 \rangle \left( \frac{\langle n_1 \rangle}{\langle n_3 \rangle} |V_{e1}|^2 + \frac{\langle n_2 \rangle}{\langle n_3 \rangle} |V_{e2}|^2 + |V_{e3}|^2 \right) \quad (4.130)$$

$$\sigma_0^{relic} = \frac{\bar{G}^2}{\pi} E_e^* p_e^* [1 + 3\lambda^2], \quad E_e^* \rightarrow \frac{m_n^2 + m_e^2 - m_p^2}{2m_n} \approx 1,299 \text{ MeV} \quad (4.131)$$

$$\sigma_0^{relic} \approx 3,2 \cdot 10^{-44} \text{ cm}^2 \quad (4.132)$$

На Рис. 30 показаны значения скорости счета<sup>27</sup> реликтовых нейтрино в  $\text{s}^{-1}$  для двух рассмотренных случаев нормальной (4.129) и обратной (4.130) иерархий масс нейтрино,  $x_1 = \frac{\langle n_2 \rangle}{\langle n_1 \rangle}$ ,  $x_2 = \frac{\langle n_3 \rangle}{\langle n_1 \rangle}$ ,  $y_1 = \frac{\langle n_1 \rangle}{\langle n_3 \rangle}$ ,  $y_2 = \frac{\langle n_2 \rangle}{\langle n_3 \rangle}$ . Горизонтальная плоскость означает значение скорости счета равной  $R = 5,4 \cdot 10^{-32} \text{ s}^{-1}$ , когда все средние концентрации одинаковы и равны  $\langle n_i \rangle = 56 \text{ cm}^{-3}$ . Графики построены при средних значениях углов смешивания (4.110).

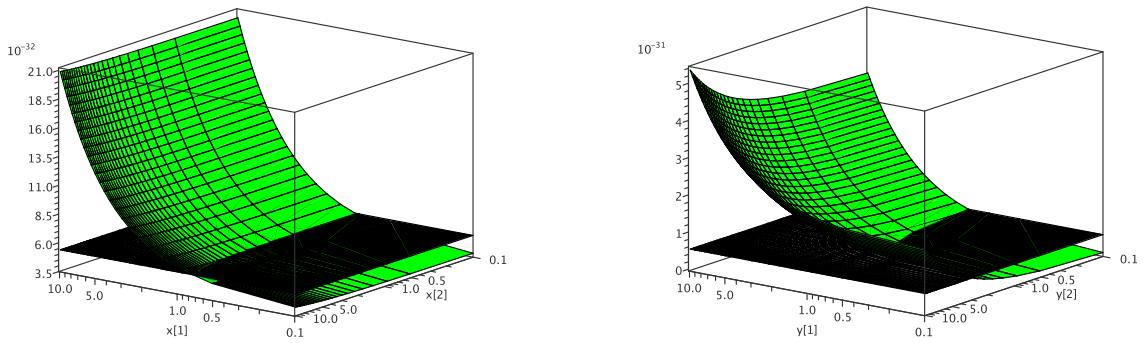


Рис. 30: Скорость счета реликтовых нейтрино при нормальной (график слева) и обратной (справа) иерархиях масс нейтрино.

<sup>27</sup>Для реакции  $\nu + {}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^-$  горизонтальная плоскость на Рис. 30 означает скорость счета равную  $\sim 10$  событий в год для 100 граммов трития, [55].

## **4.7 Резюме**

Получена зависимость сечения безпороговой реакции квазиупругого рассеяния нейтрино на нейтроне от вариации масс нейтрино и углов смешивания в допустимых сегодняшними экспериментами пределах. Приведена оценка влияния эффекта гравитационной кластеризации массивных нейтрино в Галактике на скорость счета числа событий в таком детекторе при нормальной и обратной иерархиях масс нейтрино.

## **Заключение**

В разделе 2 выведены известные формулы для вероятности нейтринных осцилляций в вакууме и веществе в рамках нерелятивистской квантовой механики для двух- и трёх-компонентной теории нейтрино. Построены графики вероятности осцилляций при экспериментально допустимых значениях углов смешивания. На построенных графиках (Рис. 11) показано резонансное усиление вероятности нейтринных осцилляций в веществе, известное как MSW-эффект.

В разделах 3 и 4 приведены основные результаты настоящей работы:

- Получена формула вероятности нейтринных осцилляций в рамках квантовой теории поля в формализме волновых пакетов в вакуумном случае. Развитый формализм позволяет обобщить задачу: и ввести вещество между источником и детектором. В этом формализме получена формула вероятности нейтринных осцилляций при наличии вещества. Полученные формулы вероятностей существенно отличаются от широко используемых соответствующих формул, полученных в рамках нерелятивистской квантовой механики.
- Решена задача нахождения кинематики и сечения процесса квазиупругого рассеяния нейтрино на нуклоне с учетом конечных масс нейтрино. Несмотря на наличие необходимости  $1/v_\nu$  в сечении, необходимости в скорости счета нет. Подход КТП позволяет рассматривать сечение как некогерентную сумму сечений. Получены пределы изменения скорости счета реликтовых нейтрино с учетом: экспериментально допустимых значений углов смешивания и масс нейтрино, эффекта гравитационной кластеризации нейтрино, нормальной и обратной иерархии масс нейтрино. Показано, что скорость счета реликтовых нейтрино может на несколько порядков отличаться от большинства известных оценок в виду различных средних концентраций нейтрино отдельных массовых типов.

Результаты настоящей работы приведены также в двух докладах [71], [72].

## **Благодарности**

В первую очередь выражаю особую благодарность своим научным руководителям к.ф.м.н. Д. В. Наумову и с.н.с.–к.ф.м.н. В. А. Наумову за приглашение учиться и работать в ОИЯИ и стать их студентом, знания, которые они мне передали, и материальную поддержку.

Также считаю своим приятным долгом выразить благодарность всем профессорам и преподавателям кафедры теоретической физики физического факультета Иркутского Государственного университета, и в первую очередь — проф. А. Н. Валлу, проф. А. Е. Каюшину, проф. С. И. Синеговскому за знания и навыки, которые они мне дали, и за поддержание связей с ОИЯИ; с.н.с. К. С. Кузьмину и проф. О. В. Теряеву за рецензирование настоящей работы и за критические замечания по поводу доклада [71];

Фонду Династия, моим друзьям и родственникам за материальную и моральную поддержку.

## A Приложения

### A.1 Оценка размазки $\sigma^2$

В формулу вакуумных нейтринных осцилляций в квантово-полевом подходе с волновыми пакетами (3.102) входит величина  $\sigma^2$  размерности  $[L^2]$ , определенная в (3.72)

$$\sigma_i^2 = \frac{d^2 D_i}{d(q^0)^2} \Big|_{q^0=\lambda_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{A.1.1})$$

как отмечалось выше  $\lambda_i \approx \lambda$ , поэтому  $\sigma_i \approx \sigma$ .

Определения функции  $D(q)$  — (3.60)

$$D(q) = \frac{1}{2}(W_s^{-1})_{\mu\nu}(\bar{k}_s - \bar{p}_s - q)^\mu(\bar{k}_s - \bar{p}_s - q)^\nu + \frac{1}{2}(W_d^{-1})_{\mu\nu}(\bar{k}_d - \bar{p}_d + q)^\mu(\bar{k}_d - \bar{p}_d + q)^\nu \quad (3.60)$$

Определения матриц  $4 \times 4 W_{s,d}^{-1}$  — (3.52), (3.54), входящих в определение  $D(q)$ . Определения функций  $E_{s,d}$  — (3.46) (3.47), входящих в определения  $W_{s,d}^{-1}$ . Определения функций  $\Psi_{s,d}$  — (3.45), входящих в определения  $E_{s,d}$ . Определения функций  $\Psi_i(\mathbf{x})$ ,  $\tilde{\Psi}_j(\mathbf{x})$  — (3.37), (3.38) — фурье-образы от функций  $a_i(k_i, \bar{\mathbf{k}}_i)$ ,  $\tilde{a}_j(p_j, \bar{\mathbf{p}}_j)$ , которые напрямую связаны с функциями  $\phi_i(k_i, \bar{\mathbf{k}}_i)$ ,  $\varphi_j(p_j, \bar{\mathbf{p}}_j)$ , определяющими вид волновых пакетов, — (3.28).

Используя эти определения можно переписать уравнение на  $\sigma^2$  (A.1.1)

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{d^2}{d(q^0)^2} D(q) \Big|_{q^0=\lambda} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{d(q^0)^2} \left( (W_s^{-1})_{\mu\nu}(\bar{k}_s - \bar{p}_s - q)^\mu(\bar{k}_s - \bar{p}_s - q)^\nu + (W_d^{-1})_{\mu\nu}(\bar{k}_d - \bar{p}_d + q)^\mu(\bar{k}_d - \bar{p}_d + q)^\nu \right) \Big|_{q^0=\lambda} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{d(q^0)^2} \left( \left( - \frac{\partial^2 E_s(x - x_s)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \Big|_{x=x_s} \right)^{-1} (\bar{k}_s - \bar{p}_s - q)^\mu(\bar{k}_s - \bar{p}_s - q)^\nu + \right. \\ &\quad \left. + \left( - \frac{\partial^2 E_d(y - y_d)}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \Big|_{y=y_d} \right)^{-1} (\bar{k}_d - \bar{p}_d + q)^\mu(\bar{k}_d - \bar{p}_d + q)^\nu \right) \Big|_{q^0=\lambda} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{d(q^0)^2} \left\{ \left( - \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \prod_{j=1}^{F_s} \frac{\tilde{\Psi}_j(-\bar{\mathbf{v}}_j(x^0 - x_s^0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s))}{\tilde{\Psi}_j(0)} \prod_{i=1}^{I_s} \frac{\Psi_i(+\bar{\mathbf{v}}_i(x^0 - x_s^0) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s))}{\Psi_i(0)} \Big|_{x=x_s} \right)^{-1} \cdot \right. \\ &\quad \left. (\bar{k}_s - \bar{p}_s - q)^\mu(\bar{k}_s - \bar{p}_s - q)^\nu + \right. \\ &\quad \left. + \left( - \frac{\partial^2}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \prod_{j=F-F_s}^F \frac{\tilde{\Psi}_j(-\bar{\mathbf{v}}_j(y^0 - y_d^0) + (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d))}{\tilde{\Psi}_j(0)} \prod_{i=I-I_s}^I \frac{\Psi_i(+\bar{\mathbf{v}}_i(y^0 - y_d^0) - (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d))}{\Psi_i(0)} \Big|_{y=y_d} \right)^{-1} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (\bar{k}_d - \bar{p}_d + q)^\mu(\bar{k}_d - \bar{p}_d + q)^\nu \right\} \Big|_{q^0=\lambda} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{d^2}{d(q^0)^2} \left\{ \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \left( \prod_{j=1}^{F_s} \frac{\int \frac{d\mathbf{p}_j}{(2\pi)^3} \tilde{a}_j(\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}_j) e^{-i(\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}_j)(-\bar{\mathbf{v}}_j(x^0 - x_s^0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s))}}{\int \frac{d\mathbf{p}_j}{(2\pi)^3} \tilde{a}_j(\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}_j)} \right. \right. \right. \\
&\quad \cdot \prod_{i=1}^{I_s} \frac{\int \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} a_i(\mathbf{k}_i - \bar{\mathbf{k}}_i) e^{+i(\mathbf{k}_i - \bar{\mathbf{k}}_i)(+\bar{\mathbf{v}}_i(x^0 - x_s^0) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s))}}{\int \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} a_i(\mathbf{k}_i - \bar{\mathbf{k}}_i)} \Big|_{x=x_s} \Big)^{-1} \\
&\quad \cdot (\bar{k}_s - \bar{p}_s - q)^\mu (\bar{k}_s - \bar{p}_s - q)^\nu + \\
&\quad + \left( -\frac{\partial^2}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \left( \prod_{j=F-F_s}^F \frac{\int \frac{d\mathbf{p}_j}{(2\pi)^3} \tilde{a}_j(\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}_j) e^{-i(\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}_j)(-\bar{\mathbf{v}}_j(y^0 - y_d^0) + (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d))}}{\int \frac{d\mathbf{p}_j}{(2\pi)^3} \tilde{a}_j(\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}_j)} \right. \right. \\
&\quad \cdot \prod_{i=I-I_s}^I \frac{\int \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} a_i(\mathbf{k}_i - \bar{\mathbf{k}}_i) e^{+i(\mathbf{k}_i - \bar{\mathbf{k}}_i)(+\bar{\mathbf{v}}_i(y^0 - y_d^0) - (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d))}}{\int \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} a_i(\mathbf{k}_i - \bar{\mathbf{k}}_i)} \Big|_{y=y_d} \Big)^{-1} \\
&\quad \cdot (\bar{k}_d - \bar{p}_d + q)^\mu (\bar{k}_d - \bar{p}_d + q)^\nu \Bigg. \Bigg|_{q^0=\lambda} \quad (\text{A.1.2})
\end{aligned}$$

$W_{s,d}$  не зависят от  $q$ , поэтому размазка имеет вид

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} ((W_s^{-1})_{\mu\nu} + (W_d^{-1})_{\mu\nu}) \frac{d^2}{d(q^0)^2} q^\mu q^\nu \quad (\text{A.1.3})$$

Для получения оценки “пространственной размазки”  $\sigma^2$  будем предполагать, что функции  $a_i(k_i, \bar{\mathbf{k}}_i)$ ,  $\tilde{a}_j(p_j, \bar{\mathbf{p}}_j)$  имеют гауссовый вид<sup>28</sup>. А значит, гауссовый вид будет также у их фурье-образов  $\Psi_i(\mathbf{x})$ ,  $\tilde{\Psi}_j(\mathbf{x})$ , (3.37), (3.38), положим

$$\Psi_i(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} a_i(\mathbf{k}_i) e^{+i\mathbf{k}_i \mathbf{x}} = e^{-\frac{1}{\alpha_i^2} \mathbf{x}^2}, \quad (\text{A.1.4})$$

$$\tilde{\Psi}_j(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{p}_j}{(2\pi)^3} \tilde{a}_j(\mathbf{p}_j) e^{-i\mathbf{p}_j \mathbf{x}} = e^{-\frac{1}{\alpha_j^2} \mathbf{x}^2}, \quad (\text{A.1.5})$$

где  $\alpha_i$  — пространственная область локализации (размазка)  $i$ -ой частицы, нормировочный множитель  $\left(\frac{\pi\alpha_i^2}{8}\right)^{\frac{3}{2}}$  специально опущен, поскольку в  $\sigma^2$  он не входит:

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{F_s} \frac{\tilde{\Psi}_j(-\bar{\mathbf{v}}_j(x^0 - x_s^0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s))}{\tilde{\Psi}_j(0)} \prod_{i=1}^{I_s} \frac{\Psi_i(+\bar{\mathbf{v}}_i(x^0 - x_s^0) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s))}{\Psi_i(0)} = \\
&= e^{-\sum_{i=1}^{N_s} \frac{1}{\alpha_i^2} (\bar{\mathbf{v}}_i(x^0 - x_s^0) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s))^2} \quad (\text{A.1.6})
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$W_{s,d} = -\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} e^{-\sum_{i=1}^{N_{s,d}} \frac{1}{\alpha_i^2} (\mathbf{v}_i^2(x^0 - x_{s,d}^0)^2 - 2\mathbf{v}_i(x^0 - x_{s,d}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{s,d}) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{s,d})^2)} \Big|_{x=x_{s,d}} \quad (\text{A.1.7})$$

<sup>28</sup>Выбор гауссовой формы волнового пакета является широко используемым для подобного рода оценок, см. также [12].

$N_s$ ,  $N_d$  — число частиц в источнике, детекторе соответственно, исключая нейтрино.

$$W_{s,d} = 2 \sum_{i=1}^{N_{s,d}} \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v}_i^2}{\alpha_i^2} & -\frac{\mathbf{v}_i(1)}{\alpha_i^2} & -\frac{\mathbf{v}_i(2)}{\alpha_i^2} & -\frac{\mathbf{v}_i(3)}{\alpha_i^2} \\ -\frac{\mathbf{v}_i(1)}{\alpha_i^2} & \frac{1}{\alpha_i^2} & 0 & 0 \\ -\frac{\mathbf{v}_i(2)}{\alpha_i^2} & 0 & \frac{1}{\alpha_i^2} & 0 \\ -\frac{\mathbf{v}_i(3)}{\alpha_i^2} & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_i^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.8})$$

$\mathbf{v}_{i(k)}$ ,  $k = 1, 2, 3$  — проекции средней скорости  $i$ -ой частицы. Нам необходимо вычислить  $(W_{s,d}^{-1})_{\mu\nu}$ , находим следующие равенства:

$$(W_{s,d}^{-1})_{00} = \frac{1}{\|W_{s,d}\|} \left( 2 \sum_{i=1}^{N_{s,d}} \frac{1}{\alpha_i^2} \right)^3 \quad (\text{A.1.9})$$

$$(W_{s,d}^{-1})_{0i} = (W_{s,d}^{-1})_{i0} = \frac{1}{\|W_{s,d}\|} 2^3 \left( \sum_{j=1}^{N_{s,d}} \frac{1}{\alpha_j^2} \right)^2 \left( \sum_{k=1}^{N_{s,d}} \frac{v_{k(i)}}{\alpha_k^2} \right) (-1)^i \quad (\text{A.1.10})$$

$$(W_{s,d}^{-1})_{ii} = \frac{1}{\|W_{s,d}\|} 2^3 \left( \sum_{j=1}^{N_{s,d}} \frac{1}{\alpha_j^2} \right) \left[ \left( \sum_{k=1}^{N_{s,d}} \frac{\mathbf{v}_k}{\alpha_k^2} \right) \left( \sum_{j=1}^{N_{s,d}} \frac{1}{\alpha_j^2} \right) + \left( \sum_{j=1}^{N_{s,d}} \frac{v_{j(\xi)}}{\alpha_j^2} \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^{N_{s,d}} \frac{v_{j(\zeta)}}{\alpha_j^2} \right)^2 \right] \quad (\text{A.1.11})$$

$\xi \neq \zeta \neq i$

$$(W_{s,d}^{-1})_{ij} = (W_{s,d}^{-1})_{ji} = (-1) \frac{1}{\|W_{s,d}\|} 2^3 \left( \sum_{k=1}^{N_{s,d}} \frac{1}{\alpha_k^2} \right) \left( \sum_{k'=1}^{N_{s,d}} \frac{v_{k'(i)}}{\alpha_{k'}^2} \right) \left( \sum_{k''=1}^{N_{s,d}} \frac{v_{k''(j)}}{\alpha_{k''}^2} \right) \quad (\text{A.1.12})$$

$$\|W_{s,d}\| \equiv \det W_{s,d} = 2^4 \left( \sum_{i=1}^{N_{s,d}} \frac{1}{\alpha_i^2} \right)^2 \sum_{i,j}^{N_{s,d}} \left[ \frac{\mathbf{v}_i^2}{\alpha_i^2} \frac{1}{\alpha_j^2} - \frac{\mathbf{v}_i(1)}{\alpha_i^2} \frac{\mathbf{v}_j(1)}{\alpha_j^2} - \frac{\mathbf{v}_i(2)}{\alpha_i^2} \frac{\mathbf{v}_j(2)}{\alpha_j^2} - \frac{\mathbf{v}_i(3)}{\alpha_i^2} \frac{\mathbf{v}_j(3)}{\alpha_j^2} \right] \quad (\text{A.1.13})$$

$$\det W_{s,d} = 2^4 \left( \sum_{i=1}^{N_{s,d}} \frac{1}{\alpha_i^2} \right)^2 \sum_{i,j}^{N_{s,d}} \left[ \frac{\mathbf{v}_i^2}{\alpha_i^2} \frac{1}{\alpha_j^2} - \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j}{\alpha_i^2 \alpha_j^2} \right] \quad (\text{A.1.14})$$

Если размазка волновых пакетов  $\alpha_i$  всех частиц в конфигурационном пространстве стремиться к бесконечности — эффективно это означает переход к описанию плоскими волнами:  $\forall i : \alpha_i \rightarrow \infty$ , тогда :  $\|W_{s,d}\| \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma^2 \rightarrow \infty \Rightarrow \mathcal{P}_{QFT} \rightarrow \mathcal{P}_{QM}$ . (размерность  $[\sigma^2] = [L^2]$ ).

## A.2 Область применимости квантовой теории поля, волновые пакеты

Квантовая теория поля (в рамках Стандартной Модели) может достаточно хорошо описывать многие процессы рассеяния элементарных частиц. Трудности начинают возникать при попытке чисто аксиоматически описать процессы взаимодействия элементарных частиц включающих не только рассеяние, но и связанные состояния с конечным временем жизни. Здесь приходится использовать феноменологические подходы. В физике нейтрино почти всегда существуют нестабильные частицы как в начальных, так и в конечных состояниях. Нестабильную частицу можно рассматривать как частицу с некоторой неопределенностью в ее массовом спектре, и вводить в теорию ширину. Вследствие этого возникает неопределенность в импульсах частиц участвующих в реакциях с нестабильными частицами. Хороший пример такой реакции: распад пиона, и детектирование образовавшегося нейтрино в рассеянии (обратный  $\beta^\pm$ -распад) на нуклоне:

$$\begin{aligned} \pi^\mp &\rightarrow \mu^\mp + \bar{\nu}(\nu) \\ &\hookrightarrow \bar{\nu}(\nu) + n(p) \rightarrow p(n) + e^\mp \end{aligned} \quad (\text{A.2.1})$$

Реакция (A.2.1) возможна, если нейтрино смешиваются и взаимодействуют только слабым образом как показано на Рис. 31.

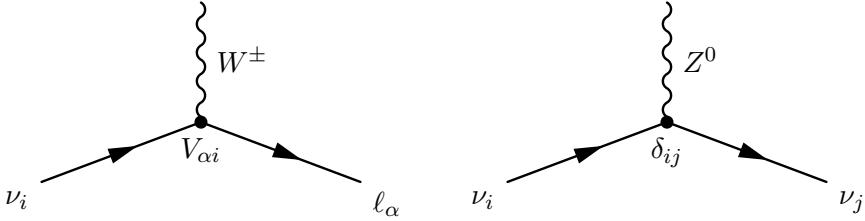


Рис. 31: СС и NC взаимодействия нейтрино.

$$\mathcal{L}_\nu = \mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_0 \quad (\text{A.2.2})$$

Лагранжиан взаимодействия  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  нейтрино в Стандартной Модели определяется следующим выражением:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \mathcal{L}_{NC} + \mathcal{L}_{CC} = \sum_i \bar{\ell}_\alpha V_{\alpha i} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_i W^\mu + \sum_i \bar{\nu}_i \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_i Z^\mu \quad (\text{A.2.3})$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{2} \bar{\nu} \overleftrightarrow{\hat{\partial}} \nu - \bar{\nu} M \nu = \bar{\nu} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \overleftrightarrow{\hat{\partial}} - m_1 & & \\ & \frac{i}{2} \overleftrightarrow{\hat{\partial}} - m_2 & \\ & & \frac{i}{2} \overleftrightarrow{\hat{\partial}} - m_3 \end{pmatrix} \nu = \sum_i \bar{\nu}_i \left( \frac{i}{2} \overleftrightarrow{\hat{\partial}} - m_i \right) \nu_i \quad (\text{A.2.4})$$

$$\bar{\nu} = (\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \bar{\nu}_3) \quad \nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.5})$$

Свободный лагранжиан (A.2.4) является эрмитовым и уравнения Эйлера-Лагранжа являются уравнениями Дирака на поля нейтрино с определенной массой.  $\overleftrightarrow{\hat{\partial}}$  действует следующим стандартным способом

$$\overleftrightarrow{\hat{\partial}} \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \quad (\text{A.2.6})$$

$$\mathcal{L}_\nu = \sum_i \mathcal{L}_i = \sum_i (\bar{\ell}_\alpha V_{\alpha i} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_i W^\mu + \bar{\nu}_i \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_i Z^\mu + \bar{\nu}_i m_i \nu_i) \quad (\text{A.2.7})$$

Здесь стоит заметить, что лагранжиан (A.2.8) взаимодействия не имеет смысла (на Рис. 32 изображены вершины соответствующие лагранжиану (A.2.8)):

$$\mathcal{L}_{\nu_\alpha} = \sum_i \bar{\ell}_\alpha V_{\alpha i} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_i W^\mu + \sum_{i,j} V_{\beta j}^* V_{\alpha i} \bar{\nu}_j \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_i Z^\mu + \sum_{i,j} V_{\alpha i} V_{\alpha j}^* \bar{\nu}_i m_{ij} \nu_j \quad (\text{A.2.8})$$

$$m_{ij} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$$

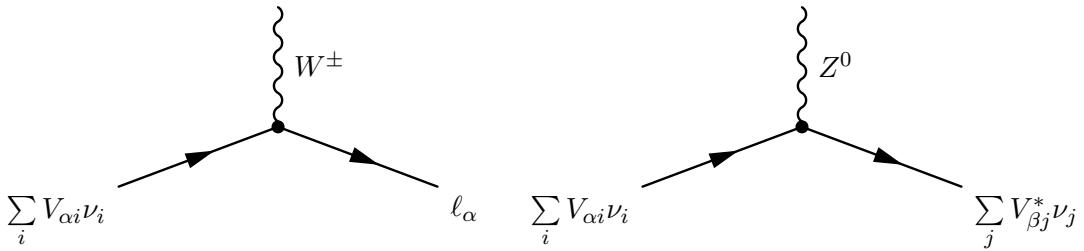


Рис. 32: СС и NC взаимодействия нейтрино если считать что существуют только флэйворные нейтрино. (Вершин, изображенных на этом рисунке, не существует; приведено для академической справки)

Поля в лагранжиане также являются волновыми пакетами, размазка заложена не в  $u/v$  биспинорах, а в операторах  $a/b$  см. формулу (3.33) п.11 *Физический смысл решений в виде плоских волн и волновых пакетов*, [46], там же дается оценка размазки:  $p \lesssim \hbar/\lambda_C = mc$ . С другой стороны это открывает другую сторону исследований, теперь мы не можем создать чистое состояние из частиц без примеси античастиц, это должно приводить к тому, что выживают два слагаемых в амплитуде, в одном будет пропагатор нейтрино, в другом - антинейтрино. (см. также [49])

### A.3 Полный пропагатор нейтрино, собственно-энергетическая часть и формула нейтринных осцилляций

При рассмотрении нейтринных осцилляций в квантовой теории поля, пропагатор нейтринного поля возникает с необходимостью, формула (3.34). В этой формуле предполагается, что масса нейтрино это уже перенормированная масса, с учетом поправок, связанных с так называемой собственной энергией (которая включает все возможные петли), а также с учетом различных радиационных поправок<sup>29</sup>. Вычисление собственной энергии нейтрино должно указывать на ограничение массы снизу соответствующего нейтрино(особенно это должно касаться легчайшего массового нейтрино). Данный подраздел задумывался как часть основного текста рассмотрения нейтринных осцилляций в квантовой теории поля, поскольку хотелось показать переномировку масс нейтрино. Затем необходимость в этом отпала, т.к. в формуле вероятности нейтринных осцилляций уже находятся перенормированные массы нейтрино. Поэтому данный подраздел приведен как приложение, чтобы показать, что в пропагаторы нейтрино входят перенормированные массы нейтрино, которые

<sup>29</sup>Рассмотрение радиационных однопетлевых поправок в рассеяние нейтрино на нуклоне изложено, например, в работе [68].

фигурируют в формуле вероятности нейтриноных осцилляций, с учетом всех возможных петель.

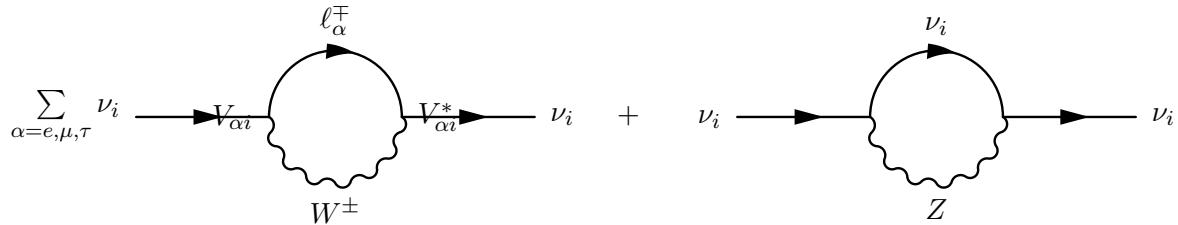


Рис. 33:  $\Sigma_{CC}^{(1)} + \Sigma_{NC}^{(1)}$

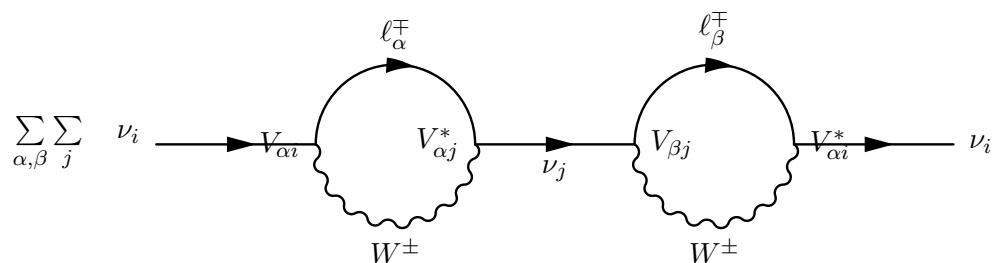


Рис. 34:  $\Sigma_{CC}^{(1)} \otimes \Sigma_{CC}^{(1)}$

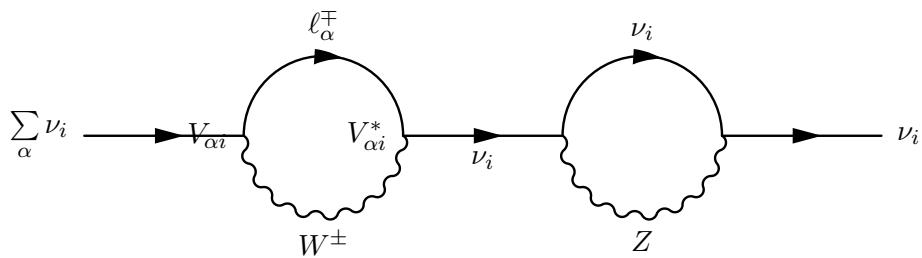


Рис. 35:  $\Sigma_{CC}^{(1)} \otimes \Sigma_{NC}^{(1)}$

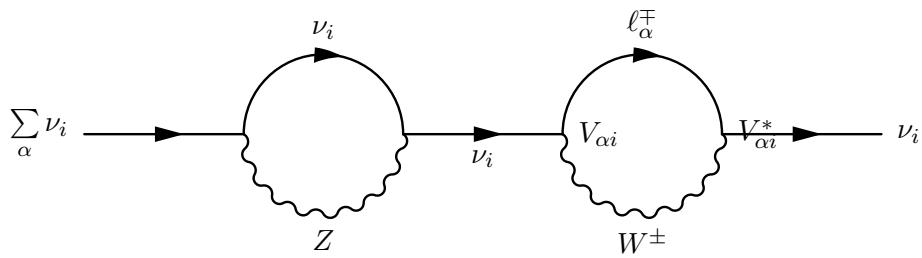


Рис. 36:  $\Sigma_{NC}^{(1)} \otimes \Sigma_{CC}^{(1)} = \Sigma_{CC}^{(1)} \otimes \Sigma_{NC}^{(1)}$  (Рис. 35)

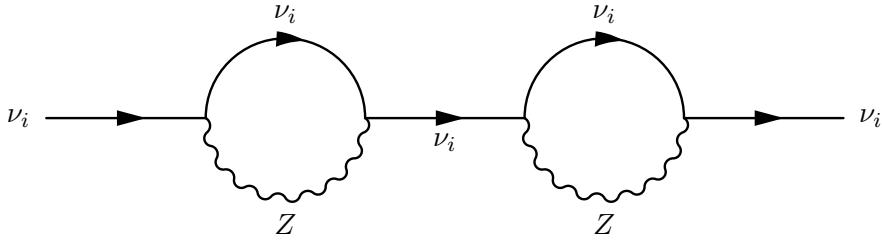


Рис. 37:  $\Sigma_{NC}^{(1)} \otimes \Sigma_{NC}^{(1)}$

Полный пропагатор  $i$ -го нейтрино имеет следующий вид

$$S_i(q) = \frac{1}{(S_i^0(q))^{-1} - \Sigma_i} = \frac{1}{\hat{q}_i - m_i - \Sigma_i} \quad (\text{A.3.1})$$

$S_i^0(q)$  — затравочный пропагатор без учета собственно-энергетической части (вклада от всех возможных петель)

$$S_i^0(q) = \frac{1}{\hat{q}_i - m_i} \quad (\text{A.3.2})$$

На рисунках 33–37 для наглядности изображены петли с затравочными пропагаторами, т.е. названия рисунков более правильно записывать не как  $\Sigma$ , а как  $S_0^{-1}\Sigma S_0^{-1}$ , где  $\Sigma$  соответствующая петля,  $S_0^{-1} = \hat{q}_i + m_i$  — обратный затравочный пропагатор  $i$ -го нейтрино.

Особенно нетривиальным является вклад от  $\Sigma_{CC}^{(1)} \otimes \Sigma_{CC}^{(1)}$  (Рис. 34), т.к. содержит в себе учет смешивания нейтрино при  $i \neq j$ .

Символами  $\Sigma_{CC,NC}^{(1)}$  обозначены петли соответствующие заряженному и нейтральному токам соответственно. Индекс (1) указывает на первый порядок разложения, так например петля во втором порядке  $\Sigma^{(2)}$  может быть выражена через петли  $\Sigma_{CC,NC}^{(1)}$

$$\Sigma^{(2)} = \Sigma_{CC}^{(1)} \otimes \Sigma_{CC}^{(1)} + 2 \cdot \Sigma_{CC}^{(1)} \otimes \Sigma_{NC}^{(1)} + \Sigma_{NC}^{(1)} \otimes \Sigma_{NC}^{(1)} \quad (\text{A.3.3})$$

Собственно-энергетическая часть от всех петель может быть представлен в виде ряда

$$\Sigma = \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)} + \dots = (\Sigma_{CC}^{(1)} + \Sigma_{NC}^{(1)}) + \Sigma^{(2)} + \dots \quad (\text{A.3.4})$$

Вполне может оказаться так, что эксперименты по нейтриинным осцилляциям чувствительны к  $\Delta m_{ij}^2 = \tilde{m}_i^2 - \tilde{m}_j^2$ , где  $\tilde{m}_i$  — масса  $i$ -го нейтрино с учетом всех поправок, т.е.

$$\tilde{m}_i = m_i + \Sigma_i \quad (\text{A.3.5})$$

где  $\Sigma_i$  определяется рядом (A.3.4),  $m_i$  — затравочная масса  $i$ -го нейтрино.

Формально полный пропагатор (решение уравнения (A.3.1)) может быть представлен в виде ряда (уравнение Дайсона)

$$S_i(q) = S_i^0(q) + S_i^0(q)\Sigma_{ii}^{(1)}S_i^0(q) + S_i^0(q)\Sigma_{ij}^{(1)}S_j^0(q)\Sigma_{ji}^{(1)}S_i^0(q) + \dots \quad (\text{A.3.6})$$

Первое слагаемое в этом ряде соответствует нулевому приближению, второе слагаемое эквивалентно диаграммам Фейнмана на Рис. 33, третье слагаемое — это сумма диаграмм на Рис. 34–37.

#### A.4 Новое рассмотрение нейтринных осцилляций в квантовой теории поля

Здесь мы получим результат из работы [8] (формула (16) [8], (2.5) [9]) другим по сравнению с [8] способом,

$$\mathcal{A}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^\infty = \sum_j \mathcal{A}_j^S \mathcal{A}_j^D V_{\beta j} V_{\alpha j}^* e^{iq_j L}, \quad (\text{A.4.1})$$

а также обсудим принцип кластерной разложимости S-матрицы (§4.3 [47]) (кластерное свойство, свойство асимптотической факторизации в терминологии Боголюбова, *Гл. 7, Релятивистская инвариантность в квантовой теории* [42])

Следуя работам [8], [9], будем выносить PMNS матричный элемент из амплитуды для наглядности. Представим себе что в источнике родилось нейтрино описываемое состоянием с определенной массой  $|\nu_i\rangle$  в реакции с заряженным лептоном  $\ell_\alpha$ . Амплитуда имеет следующий вид

$$\mathcal{A}_{s i} = \langle f_s, \nu_i | S_{s i} | i_s \rangle V_{\alpha i}^* \quad (\text{A.4.2})$$

напоминаем, что элемент матрицы PMNS мы специально вынесли для наглядности.

Затем  $|\nu_i\rangle$  нейтрино прилетело к детектору, который расположен на расстоянии  $L$  от источника; идеализируем картину, и предполагаем это состояние изменилось согласно однородным преобразованиям Лоренца, пренебрегая взаимодействием нейтрино с вакуумом и средой, которые могут находиться между источником и детектором,

$$|\nu_i\rangle \longrightarrow e^{iq_i a} |\nu_i\rangle \quad (\text{A.4.3})$$

$$q_i = (E_i, \mathbf{q}_i) — 4\text{-импульс нейтрино } |\nu_i\rangle. \mathbf{q}_i \uparrow\!\!\! \uparrow \mathbf{a}. a = (t_i = L/v_i, \mathbf{a}). |\mathbf{a}| = L.$$

$$t_i = \frac{L}{v_i} = \frac{LE_i}{|\mathbf{q}_i|}, \quad q_i a = E_i^2 \frac{L}{|\mathbf{q}_i|} - |\mathbf{q}_i| L = \frac{m_i^2}{|\mathbf{q}_i|} L \quad (\text{A.4.4})$$

$$|\nu_i\rangle \longrightarrow e^{iq_i a} |\nu_i\rangle = e^{i \frac{m_i^2}{|\mathbf{q}_i|} L} |\nu_i\rangle \quad (\text{A.4.5})$$

Далее это состояние входит в детектор как состояние in. Запишем амплитуду в детекторе, в котором нейтрино взаимодействуя порождает заряженный лептон  $\ell_\beta$

$$\mathcal{A}_{d i} = \langle f_d | S_{d i} | i_d, \nu_i \rangle V_{\beta i} e^{i \frac{m_i^2}{|\mathbf{q}_i|} L} \quad (\text{A.4.6})$$

Согласно принципу кластерной разложимости мы можем записать амплитуду двух этих процессов [47] как произведение двух амплитуд в источнике и в детекторе

$$S_i = S_{s i} S_{d i}, \quad \mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{s i} \mathcal{A}_{d i} \quad (\text{A.4.7})$$

здесь использовано условие нормированности  $\langle \nu_i | \nu_i \rangle = 1$ .

$$|i\rangle = |i_s\rangle \otimes |i_d\rangle, \quad |f\rangle = |f_i\rangle \otimes |f_d\rangle \quad (\text{A.4.8})$$

Для наглядности мы вынесем фактор  $V_{\alpha i}^*$  из  $\mathcal{A}_{s i}$  и факторы  $V_{\beta i}$ ,  $e^{i \frac{m_i^2}{|\mathbf{q}_i|} L}$  из  $\mathcal{A}_{d i}$ ,

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{s i} \mathcal{A}_{d i} V_{\alpha i} V_{\beta i} e^{i \frac{m_i^2}{|\mathbf{q}_i|} L} \quad (\text{A.4.9})$$

Согласно правилам Фейнмана полная амплитуда является суммой всех возможных амплитуд, в нашем случае трех (на древесном уровне)

$$\mathcal{A} = \sum_i \mathcal{A}_i = \sum_i \mathcal{A}_{s i} \mathcal{A}_{d i} V_{\alpha i}^* V_{\beta i} e^{i \frac{m_i^2}{|\mathbf{q}_i|} L} \quad (\text{A.4.10})$$

формула (16) из обзора [8] может быть получена из этой формулы, если бы при выводе мы положили  $t_i = 0$ , что непонятно почему формула (16)[8] именно означает это. Вполне возможно, это связано с тем, что диаграммы Фейнмана описывают только мгновенные взаимодействия.

Вероятность такого процесса

$$\mathcal{P} = |\mathcal{A}|^2 = \left| \sum_i \mathcal{A}_s i \mathcal{A}_d i V_{\alpha i}^* V_{\beta i} e^{i \frac{m_i^2}{|\mathbf{q}_i|} L} \right|^2 \quad (\text{A.4.11})$$

Отвлекаясь немного в сторону, можно сказать что факторизация S-матрицы связана с видом лагранжиана взаимодействия(это почти очевидно, достаточно вспомнить определение S-матрицы). Если лагранжиан взаимодействия имеет вид суммы отдельных лагранжианов

$$\mathcal{L} = \sum \mathcal{L}_i, \quad (\text{A.4.12})$$

то естественно предположить, что S-матрица будет иметь вид (особенно в нижнем порядке теории возмущений) произведения  $S_i$ -матриц, каждая из которых связана только с лагранжианом  $\mathcal{L}_i$ ,

$$S = \prod S_i \quad (\text{A.4.13})$$

С другой стороны вышеизложенная формулы для факторизации S-матрицы (для нейтрино) означает следующее

$$\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{s i} + \mathcal{L}_{d i}, \quad S_i = S_{d i} S_{s i} \quad (\text{A.4.14})$$

Закон сохранения импульса:

$$q_i = q = p_s - k_s = p_d - k_d \quad (\text{A.4.15})$$

$p_s, p_d$  — суммарный импульс out частиц в источнике(детекторе соответственно),  $k_s, k_d$  — суммарный импульс in частиц в источнике(детекторе соответственно).

Другое рассмотрение может быть, если мы “размажем” массовые состояния (в фазовом пространстве) и картина будет зависеть от того насколько волновые пакеты массовых нейтрино будут перекрываться. Но в случае волновых пакетов

$$\langle \nu_i | \nu_j \rangle \neq \delta_{ij}, \quad \langle \mathbf{k}(x) | \mathbf{k}(x') \rangle = \delta(\mathbf{k}(x) - \mathbf{k}(x')) \quad (\text{A.4.16})$$

$x, x'$  — некоторые непрерывные или дискретные индексы.

Запишем вероятность процесса через матричные элементы, используя  $\mathcal{A} = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \mathcal{M}$

$$\mathcal{P} = \left| \sum_i (2\pi)^8 \delta^4(p_{f_s} + q_i - p_{i_s}) \mathcal{M}_{s i} \delta^4(p_{f_d} - p_{i_d} - q_i) \mathcal{M}_{d i} V_{\alpha i}^* V_{\beta i} e^{i \frac{m_i^2}{|\mathbf{q}_i|} L} \right|^2 \quad (\text{A.4.17})$$

При необходимости размазку (описание частиц волновыми пакетами) можно ввести здесь. Число событий (см. (4.117) и [44])

$$dN = |A|^2 \prod_f \frac{d^3 \bar{p}_f}{(2\pi)^3} = \mathcal{P} \prod_f \frac{d^3 \bar{p}_f}{(2\pi)^3} \quad (\text{A.4.18})$$

## A.5 Рассеяние тепловых нейтронов на реликтом (и других) нейтрино

Реакция рассеяния тепловых нейтронов от реактора на реликтом нейтрино  $\nu_{relic} n_{heat} \rightarrow p e^-$  может явиться ключевой для обнаружения реликтом нейтрино.

Доступные значения потока тепловых нейтронов:  $\sim 10^{14} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  (непрерывный поток),  $\sim 10^{16} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  (импульсный реактор). Средняя длина волны де Броиля  $\lambda = 2\pi\hbar/|\mathbf{p}| = 2\pi\hbar/(m_n v_n)$  тепловых нейтронов  $\sim 10^{-10} \text{ m}$ , что соответствует энергиям нейтронов  $\sim 0.02 \text{ eV}$ . Электрон от обратного  $\beta$ -распада  $\nu + n \rightarrow p + e^-$  должен быть более быстрым, чем электрон от фонового чистого  $\beta$ -распада  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ .



Пучок нейтронов (заданной поперечной площади  $A$ ) через нейтроновод от реактора направляется в область пониженного давления и низких температур (полностью окруженную детекторами, которые регистрируют электроны от этой реакции), где рассеивается на реликтом нейтрино. Необходимо зарегистрировать электрон от этой реакции с энергией (4.47) (рассматриваем реликтом нейтрино, и тепловой (и ультрахолодный) нейtron почти покоящийся нейtron)

$$E_e \approx E_e^* \approx \frac{m_n^2 - m_p^2 + m_e^2}{2m_n} = 1,29 \text{ MeV} \quad (\text{A.5.2})$$

Электрон с такой энергией будет сигналом на обнаружение реликтом нейтрино. С другой стороны из реактора, да и из других источников нейтрино, летят нейтрино и с энергиями равными средней энергии реликтом нейтронов.

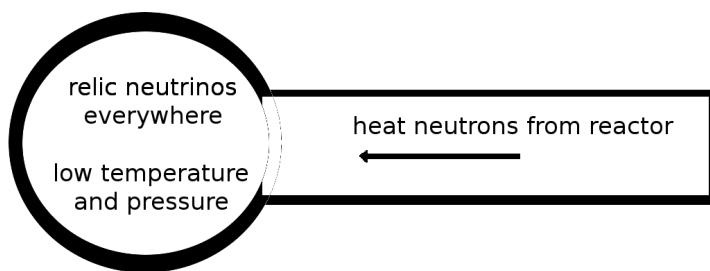


Рис. 38: Обратный  $\beta$ -распад тепловых нейтронов на реликтом нейтрино

## A.6 Поляризованные нейтроны, $\beta$ -распад и рассеяние на нейтрине

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad (\text{A.6.1})$$

$$\uparrow (1/2) \rightarrow \uparrow (\downarrow\downarrow) + \uparrow (\downarrow\uparrow) + \downarrow (\uparrow\uparrow) \quad (\text{A.6.2})$$

$$\downarrow (-1/2) \rightarrow \downarrow (\uparrow\downarrow) + \downarrow (\downarrow\uparrow) + \uparrow (\downarrow\downarrow) \quad (\text{A.6.3})$$

$$n + \nu \rightarrow p + e^- \quad (\text{A.6.4})$$

$$n \uparrow : \quad \uparrow\downarrow \rightarrow \uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow \quad n \downarrow : \quad \downarrow\uparrow \rightarrow \downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow \quad (\text{A.6.5})$$

$$\uparrow\uparrow \rightarrow \uparrow\uparrow \quad \downarrow\downarrow \rightarrow \downarrow\downarrow \quad (\text{A.6.6})$$

### $\beta$ -распад поляризованного нейтрона

Посчитаем ширину распада определенно поляризованного нейтрона. Формула дифференциальной ширины распада следующая

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_n - p_p - p_e - p_\nu) |\mathcal{M}|^2}{2E_n} \frac{d^3 \mathbf{p}_p}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{d^3 \mathbf{p}_e}{(2\pi)^3 2E_e} \frac{d^3 \mathbf{p}_\nu}{(2\pi)^3 2E_\nu} \quad (\text{A.6.7})$$

В силу кроссинг инвариантности, амплитуды (и матричные элементы) для процессов  $\nu n \rightarrow pe$  и  $n \rightarrow pe\bar{\nu}$  одинаковы, поэтому воспользуемся результатами, полученными в задаче рассеяния нейтрин на нейтроне, (4.11)

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \mathcal{M} \mathcal{M}^\dagger = \bar{G}^2 [\bar{p} \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) n] (\bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu) [\bar{n} \gamma_\beta (1 - \lambda \gamma_5) p] (\bar{\nu} \gamma^\beta (1 - \gamma_5) e) = \\ &= \bar{G}^2 \text{Sp} [p \bar{p} \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) n \bar{n} \gamma_\beta (1 - \lambda \gamma_5)] \text{Sp} (e \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu \bar{\nu} \gamma^\beta (1 - \gamma_5)) \end{aligned}$$

Для ферми-полей (4.10) (для нейтрона мы не будем проводить усреднения по спину)

$$u(p, s)\bar{u}(p, s) = \frac{1}{2}(\hat{p} + m)(1 + \gamma_5 \hat{s}), \quad \sum_s u(p, s)\bar{u}(p, s) = (\hat{p} + m)$$

$s$  — 4-вектор поляризации определяемый следующим образом, [44],

$$\mathbf{s} = \mathbf{n} + \frac{\mathbf{p}(\mathbf{n}\mathbf{p})}{m(E + m)}, \quad s_0 = \frac{\mathbf{n}\mathbf{p}}{m} \quad (\text{A.6.8})$$

Единичный вектор  $\mathbf{n}$  определяется как  $\mathbf{n} = \bar{v} \boldsymbol{\sigma} v$ . Состояние поляризации определяется как проекция спина на некоторое выделенное направление. Какой бы вид не имел биспинор  $u$  (или  $v$ ), всегда найдется вектор  $\mathbf{n}$ , такой что

$$\left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \right) \mathbf{n} v = \frac{1}{2} v \quad (\text{A.6.9})$$

Оператор поляризации  $\hat{s} = \gamma_\mu s^\mu$ , определенного в (A.6.8) вектора поляризации, удовлетворяет антисимметрическому соотношению

$$\{\hat{s}, \hat{p}\} = 0 \quad (\text{A.6.10})$$

это означает одновременную измеримость спина и импульса частицы (фермиона).

Используя уравнение (4.10), получим (4.12) :

$$\sum_{s_n, s_p, s_e, s_\nu} |\mathcal{M}|^2 = \bar{G}^2 \text{Sp} [(\hat{p}_p + m_p) \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) (\hat{p}_n + m_n) \gamma_\beta (1 - \lambda \gamma_5)] \text{Sp} [(\hat{p}_e + m_e) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (\hat{p}_\nu + m_\nu) \gamma^\beta (1 - \gamma_5)]$$

Если не суммировать по спину нейтрона, то получим

$$\begin{aligned} \sum_{s_p, s_e, s_\nu} |\mathcal{M}|^2 &= \bar{G}^2 \text{Sp} \left[ (\hat{p}_p + m_p) \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) \frac{1}{2} (\hat{p}_n + m_n) (1 + \gamma_5 \hat{s}_n) \gamma_\beta (1 - \lambda \gamma_5) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \text{Sp} [(\hat{p}_e + m_e) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (\hat{p}_\nu + m_\nu) \gamma^\beta (1 - \gamma_5)] \end{aligned} \quad (\text{A.6.11})$$

$$\begin{aligned} \sum_{s_p, s_e, s_\nu} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{s_n, s_p, s_e, s_\nu} |\mathcal{M}|^2 + \bar{G}^2 \text{Sp} \left[ (\hat{p}_p + m_p) \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) \frac{1}{2} (\hat{p}_n + m_n) (\gamma_5 \hat{s}_n) \gamma_\beta (1 - \lambda \gamma_5) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \text{Sp} [(\hat{p}_e + m_e) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (\hat{p}_\nu + m_\nu) \gamma^\beta (1 - \gamma_5)] \end{aligned} \quad (\text{A.6.12})$$

Мы посчитали значение  $\sum_{s_n, s_p, s_e, s_\nu} |\mathcal{M}|^2$ , см. формулу (4.21)

$$\sum_{s_n, s_p, s_e, s_\nu} |\mathcal{M}|^2 = 2\bar{G}^2 32 [(1 + \lambda)^2 (p_p p_e) (p_n p_\nu) + (1 - \lambda)^2 (p_p p_\nu) (p_n p_e) - (1 - \lambda^2) m_p m_n (p_e p_\nu)]$$

Значение в формуле (A.6.12)

$$\text{Sp}_2 = \text{Sp} [(\hat{p}_e + m_e) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (\hat{p}_\nu + m_\nu) \gamma^\beta (1 - \gamma_5)] \quad (\text{A.6.13})$$

находится из формулы (4.19), в которой следует положить  $\lambda = 1$  :

$$\text{Sp}_2 = 2 \cdot 4 (p_e^\mu (p_\nu)^\beta + p_e^\beta (p_\nu)^\mu - (p_e p_\nu) g^{\mu\beta}) - 2 \cdot 4 i p_e{}_\alpha (p_\nu)_\nu \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \quad (\text{A.6.14})$$

Надо посчитать  $\text{Sp}$  содержащий  $\hat{s}_n$  :

$$\text{Sp}_1 = \text{Sp} [(\hat{p}_p + m_p) \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) (\hat{p}_n + m_n) (\gamma_5 \hat{s}_n) \gamma_\beta (1 - \lambda \gamma_5)] \quad (\text{A.6.15})$$

След от нечетного числа  $\gamma$ -матриц равен нулю, поэтому

$$\begin{aligned} \text{Sp}_1 &= m_n \text{Sp} [\hat{p}_p \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) (\gamma_5 \hat{s}_n) \gamma_\beta (1 - \lambda \gamma_5)] + m_p \text{Sp} [\gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) \hat{p}_n (\gamma_5 \hat{s}_n) \gamma_\beta (1 - \lambda \gamma_5)] = \\ &= m_n \text{Sp} [\hat{p}_p \gamma_\mu (-2\lambda + \gamma_5 (1 + \lambda^2)) \hat{s}_n \gamma_\beta] + m_p (1 - \lambda^2) \text{Sp} [\gamma_\mu \hat{p}_n \gamma_5 \hat{s}_n \gamma_\beta] \end{aligned} \quad (\text{A.6.16})$$

Применяя известные формулы, которыми пользовались при вычислении усредненного по спину квадрата модуля матричного элемента, и после немного громоздких преобразований окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Sp}_1 \text{Sp}_2 &= -8m_n \cdot 8 [(1 + \lambda)^2 (p_p p_e) (s_n p_\nu) - (1 - \lambda)^2 (p_p p_\nu) (s_n p_e)] + \\ &\quad + 8(-1) \cdot 8(-1) m_p (1 - \lambda^2) [(p_n p_e) (s_n p_\nu) - (p_n p_\nu) (s_n p_e)] \end{aligned} \quad (\text{A.6.17})$$

### A.7 Анигилия $e^+e^- \rightarrow \nu\bar{\nu}$

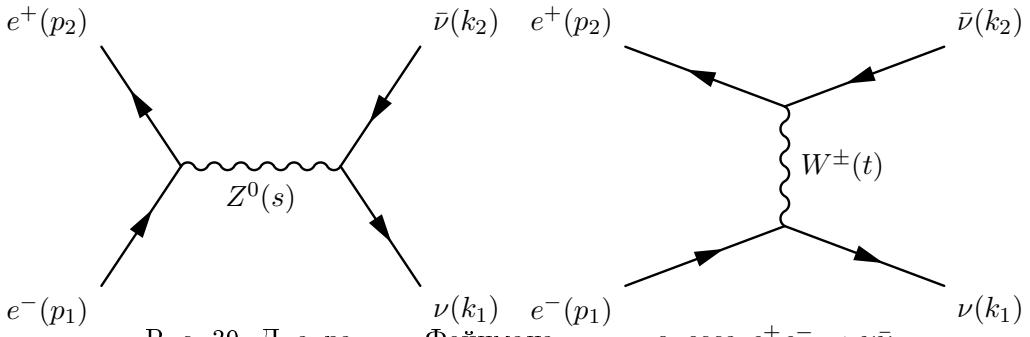


Рис. 39: Диаграммы Фейнмана для процесса  $e^+e^- \rightarrow \nu\bar{\nu}$ .

Найдем S-матрицу процесса  $e^+e^- \rightarrow \nu\bar{\nu}$ , представленного на Рис. 39,

$$S = S_{NC} + S_{CC} = (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)(\mathcal{M}_{NC} + \mathcal{M}_{CC}) \quad (\text{A.7.1})$$

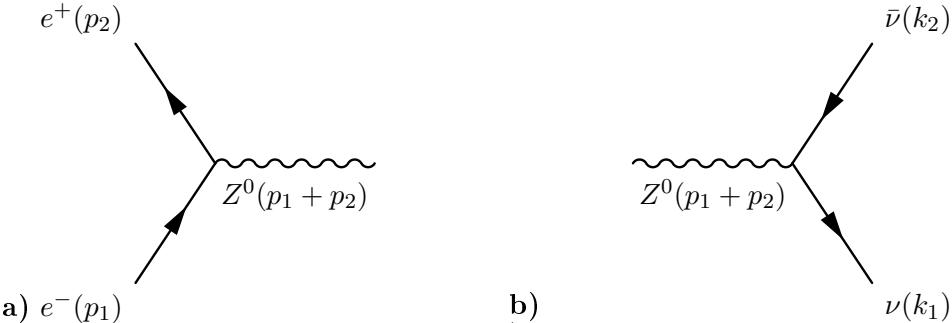


Рис. 40: Вершины  $e^+e^- \rightarrow Z$  и  $Z \rightarrow \nu\bar{\nu}$ .

Вершина с входящей электрон-позитронной парой и выходящим  $Z^0$ -бозоном, Рис. 40 а),

$$ig\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - q) \quad (\text{A.7.2})$$

$$g_V = -\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W, \quad g_A = -\frac{1}{2} \quad (\text{A.7.3})$$

Вершина с входящим  $Z^0$ -бозоном и выходящей парой нейтрино-антинейтрино, Рис. 40 б),

$$ig\gamma_\nu(1 - \gamma^5)(2\pi)^4\delta^4(k_1 + k_2 - q) \quad (\text{A.7.4})$$

Введены краткие обозначения:

$$\nu_1 \equiv \nu(k_1), \quad \nu_2 \equiv \nu(k_2), \quad e_1 \equiv e(p_1), \quad e_2 \equiv e(p_2) \quad (\text{A.7.5})$$

Учитывая пропагатор  $Z$ -бозона, запишем элементы S-матрицы для нейтрального тока (NC)

$$S_{NC} = g_N^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \bar{\nu}_1 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) (2\pi)^4 \delta^4(q - p_1 - p_2) \nu_2 \frac{g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_Z^2}}{(m_Z^2 - q^2) - i\Gamma_Z m_Z} \bar{e}_2 \gamma_\nu (g_V - g_A \gamma^5) (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - q) e_1 \quad (\text{A.7.6})$$

$$S_{NC} = g_N^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \bar{\nu}_1 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_2 \frac{g^{\mu\nu} - \frac{(k_1 + k_2)^\mu (k_1 + k_2)^\nu}{m_Z^2}}{m_Z^2 - s - i\Gamma_Z m_Z} \bar{e}_2 \gamma_\nu (g_V - g_A \gamma^5) e_1 \quad (\text{A.7.7})$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (k_1 + k_2)^2 \quad (\text{A.7.8})$$

Аналогично находится  $S_{CC}$ , необходимо сделать замену индекса  $Z \rightarrow W$  и переменной  $s \rightarrow t$  и  $g_{V,A} \rightarrow 1$ .

$$\mathcal{M}_{NC} = g_N^2 \bar{\nu}_1 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_2 \frac{g^{\mu\nu} - \frac{(k_1+k_2)^\mu (k_1+k_2)^\nu}{m_Z^2}}{m_Z^2 - s - i\Gamma_Z m_Z} \bar{e}_2 \gamma_\nu (g_V - g_A \gamma^5) e_1 \quad (\text{A.7.9})$$

$$\mathcal{M}_{CC} = -g_C^2 \bar{\nu}_1 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) e_1 \frac{g^{\mu\nu} - \frac{(k_1+k_2)^\mu (k_1+k_2)^\nu}{m_W^2}}{m_W^2 - t - i\Gamma_W m_W} \bar{e}_2 \gamma_\nu (1 - \gamma^5) \nu_2 \quad (\text{A.7.10})$$

$$t = (p_1 - k_1)^2 = (p_2 - k_2)^2 \quad (\text{A.7.11})$$

Знак минус в  $\mathcal{M}_{CC}$  появляется, т.к. нейтрино и электроны фермионы, действительно, если порядок полей в  $\mathcal{M}_{CC}$  такой как в  $\mathcal{M}_{NC}$ :

$$\bar{\nu}_1 e_1 \bar{e}_2 \nu_2 \rightarrow (2) + \bar{\nu}_1 \nu_2 e_1 \bar{e}_2 \rightarrow (1) - \bar{\nu}_1 \nu_2 \bar{e}_2 e_1 \quad (\text{A.7.12})$$

$$\frac{m_\nu^2}{m_Z^2} \ll 1 \quad (\text{A.7.13})$$

$$\frac{1}{m_Z^2} \bar{\nu}_1 (\hat{k}_1 + \hat{k}_2) (\hat{k}_1 + \hat{k}_2) \nu_2 = \frac{1}{m_Z^2} \bar{\nu}_1 (2m_\nu^2 + \{\hat{k}_1, \hat{k}_2\}) \nu_2 \approx 2 \frac{(k_1 k_2)}{m_Z^2} \bar{\nu}_1 \nu_2 \quad (\text{A.7.14})$$

Если  $\frac{(k_1 k_2)}{m_Z^2} \ll 1$ , то

$$\mathcal{M}_{NC} = \frac{g_N^2}{m_Z^2 - s - i\Gamma_Z m_Z} \bar{\nu}_1 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_2 \bar{e}_2 \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) e_1 \quad (\text{A.7.15})$$

$$\mathcal{M}_{CC} = -\frac{g_C^2}{m_W^2 - t - i\Gamma_W m_W} \bar{\nu}_1 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) e_1 \bar{e}_2 \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_2 \quad (\text{A.7.16})$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{NC} + \mathcal{M}_{CC} \quad (\text{A.7.17})$$

Применим преобразование Фирца к  $\mathcal{M}_{CC}$

$$\mathcal{M}_{CC} = +\frac{g_C^2}{m_W^2 - t - i\Gamma_W m_W} \bar{\nu}_1 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_2 \bar{e}_2 \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e_1 \quad (\text{A.7.18})$$

Тогда

$$\mathcal{M} = \bar{\nu}_1 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_2 \bar{e}_2 \gamma^\mu (g'_V - g'_A \gamma^5) e_1 \quad (\text{A.7.19})$$

где  $g'_V, g'_A$  — размерные величины  $[g'_{V,A}] = \text{MeV}^{-2}$ ,  $[g_{N,C}] = 1$

$$g'_V = \frac{g_N^2 g_V}{m_Z^2 - s - i\Gamma_Z m_Z} + \frac{g_C^2}{m_W^2 - t - i\Gamma_W m_W} \quad (\text{A.7.20})$$

$$g'_A = \frac{g_N^2 g_A}{m_Z^2 - s - i\Gamma_Z m_Z} + \frac{g_C^2}{m_W^2 - t - i\Gamma_W m_W} \quad (\text{A.7.21})$$

$$\begin{aligned} \sum_s |\mathcal{M}|^2 &= \\ &= 2 \cdot 32 g_V'^2 [(1 + \lambda')^2 (k_1 p_1) (k_2 p_2) + (1 - \lambda')^2 (k_1 p_2) (k_2 p_1) - (1 - \lambda'^2) m_e^2 (k_1 k_2)] \quad (\text{A.7.22}) \end{aligned}$$

$$\lambda' = \frac{g'_A}{g'_V} \quad (\text{A.7.23})$$

$$g_V'^2 = \frac{(g_N^2 g_V)^2}{(m_Z^2 - s)^2 + m_Z^2 \Gamma_Z^2} + \frac{g_C^4}{(m_W^2 - t)^2 + m_W^2 \Gamma_W^2} + \\ + 2g_N^2 g_V g_C^2 \frac{(m_Z^2 - s)(m_W^2 - t) + m_Z \Gamma_Z m_W \Gamma_W}{[(m_Z^2 - s)^2 + m_Z^2 \Gamma_Z^2] [(m_W^2 - t)^2 + m_W^2 \Gamma_W^2]} \quad (\text{A.7.24})$$

$$g_A'^2 = \frac{(g_N^2 g_A)^2}{(m_Z^2 - s)^2 + m_Z^2 \Gamma_Z^2} + \frac{g_C^4}{(m_W^2 - t)^2 + m_W^2 \Gamma_W^2} + \\ + 2g_N^2 g_A g_C^2 \frac{(m_Z^2 - s)(m_W^2 - t) + m_Z \Gamma_Z m_W \Gamma_W}{[(m_Z^2 - s)^2 + m_Z^2 \Gamma_Z^2] [(m_W^2 - t)^2 + m_W^2 \Gamma_W^2]} \quad (\text{A.7.25})$$

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_e^4}} \frac{1}{4} \sum_s |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}_1} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}_2} \quad (\text{A.7.26})$$

В лабораторной системе отсчета:

$$p_1 = (m_e, 0) \quad (\text{A.7.27})$$

$$(k_1 p_1) = (k_2 p_2) = m_e \mathcal{E}_1 \quad (\text{A.7.28})$$

$$(k_1 p_2) = (k_2 p_1) = m_e \mathcal{E}_2 = m_e (m_e + \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) = m_e \mathcal{E}_1 (1 - y) \quad (\text{A.7.29})$$

$$(k_1 k_2) = m_e \mathcal{E}_1 y \quad (\text{A.7.30})$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (k_1 + k_2)^2 = 2m_\nu^2 + 2m_e \mathcal{E}_1 y \approx 2m_e \mathcal{E}_1 y \quad (\text{A.7.31})$$

$$t = (p_1 - k_2)^2 = (p_2 - k_1)^2 = m_\nu^2 + m_e^2 - 2m_e \mathcal{E}_1 \quad (\text{A.7.32})$$

$$y = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_1} \quad (\text{A.7.33})$$

Легко видеть, что зависимость  $g_V'^2$ ,  $g_A'^2$  от  $y$ , которая находится в  $(m_Z^2 - s) = m_Z^2 - 2m_e \mathcal{E}_1 y$ , существенная только при высоких энергиях  $\mathcal{E}_1 \gtrsim \frac{m_Z^2}{2m_e}$ .

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{g_V'^2 m_e \mathcal{E}_1}{2\pi} \left[ (1 + \lambda')^2 + (1 - \lambda')^2 (1 - y)^2 - (1 - \lambda'^2) m_e \frac{y}{\mathcal{E}_1} \right] \quad (\text{A.7.34})$$

При энергиях  $\mathcal{E}_1 \ll \frac{m_Z^2}{2m_e}$

$$\sigma = \frac{g_V'^2 m_e \mathcal{E}_1}{2\pi} \left[ (1 + \lambda')^2 + \frac{1}{3} (1 - \lambda')^2 - (1 - \lambda'^2) \frac{m_e}{2\mathcal{E}_1} \right] \quad (\text{A.7.35})$$

Рассмотрим выражение в квадратных скобках, возвращаясь к безразмерным  $g'_V = g_V + 1$  и  $g'_A = g_A + 1$ ,

$$\begin{aligned} & \left[ (g'_V + g'_A)^2 + \frac{1}{3} (g'_V - g'_A)^2 - (g'_V^2 - g'_A^2) \frac{m_e}{2\mathcal{E}_1} \right] = \\ & = \left[ (g_V + g_A)^2 + \frac{1}{3} (g_V - g_A)^2 - (g_V^2 - g_A^2) \frac{m_e}{2\mathcal{E}_1} \right] + \\ & + \left[ (1 + 1)^2 + \frac{1}{3} (1 - 1)^2 - (1 - 1) \frac{m_e}{2\mathcal{E}_1} \right] + \\ & + \left[ (2g_V + 2(g_V + g_A) + 2g_A) + \frac{1}{3} (2g_V - 2(g_V + g_A) + 2g_A) - (2g_V - 2g_A) \frac{m_e}{2\mathcal{E}_1} \right] \quad (\text{A.7.36}) \end{aligned}$$

Третье слагаемое в сумме это интерференция между СС и NC.

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \nu\bar{\nu}) \sim \sigma(e^+e^- \rightarrow Z^0) \Gamma(Z^0 \rightarrow \nu\bar{\nu}) \quad (\text{A.7.37})$$

Если рассматривать обратную реакцию  $\nu\bar{\nu} \rightarrow ee$ , например Рис. 41, рассеяния нейтрино сверхвысоких энергий на реликтовых нейтрино, то резонансный вид сечения будет при энергиях налетающего нейтрино  $E_1 \approx \frac{m_Z^2}{2m_\nu} \simeq 4 \times 10^{21} \left( \frac{\text{eV}}{m_{\nu_i}} \right) \text{ eV}$ .

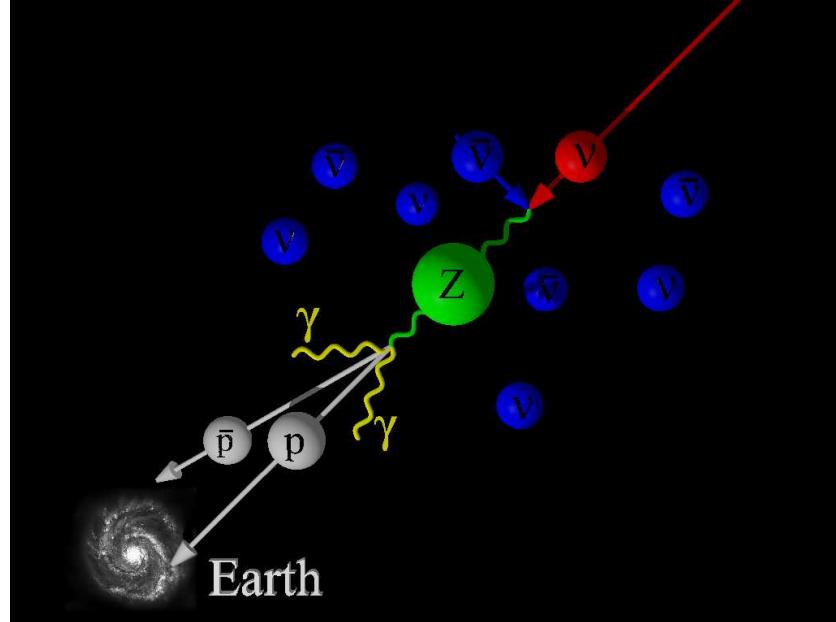


Рис. 41: Резонансная аннигиляция нейтрино высокой энергии на реликтовом нейтрино с образованием  $Z$ -бозона. [65]

Резонансный характер сечение имеет при  $s = m_Z^2$  и  $t = m_W^2$ , эта зависимость находится в (A.7.24). Посмотрим как  $s = m_Z^2$  и  $t = m_W^2$  связаны с энергиями нейтрино (A.7.31), (A.7.32) при больших энергиях нейтрино  $\mathcal{E}_1$

$$t \approx -2m_e \mathcal{E}_1 < 0, \quad s \approx 2m_e \mathcal{E}_1 y \quad (\text{A.7.38})$$

т.к. условие  $t < 0$  выполнено всегда, то сечение имеет резонансный вид только из-за обмена  $Z$ -бозоном при  $s = m_Z^2$  Рис. 42.

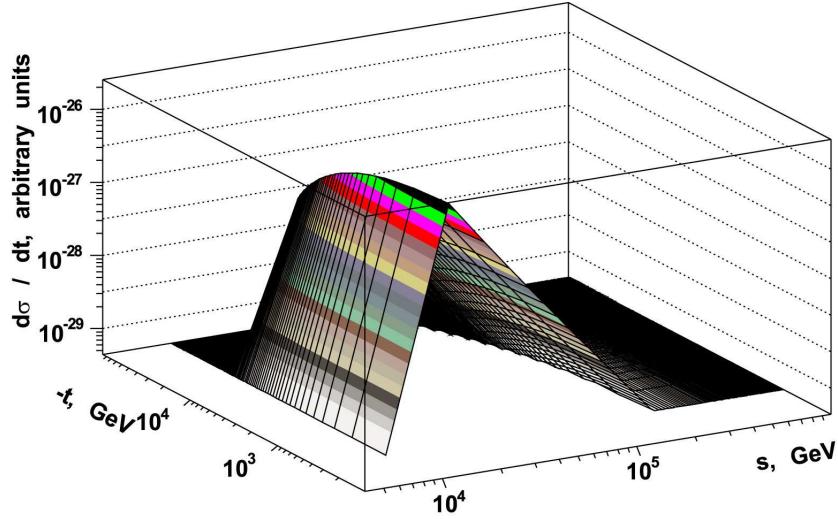


Рис. 42: Сечение  $\frac{d\sigma}{dt}(s, t)$  рассеяния  $e^+e^- \rightarrow \nu\bar{\nu}$ . Один острый пик от  $Z$  бозона при  $s = m_Z^2$ .

### A.7.1 Сечение в переменных $s, t$

Запишем квадрат модуля матричного элемента (A.7.22) и дифференциальное сечение (A.7.26) в лоренц-инвариантных кинематических переменных  $s, t$ .

Для упрощения вычислений будем рассматривать процесс в системе центра масс (с. ц. м.), и также полагать нейтрином безмассовым,

$$\mathbf{p}_{1\text{cm}} = -\mathbf{p}_{2\text{cm}} = \mathbf{p}_{\text{cm}}, \quad E_{1\text{cm}} = E_{2\text{cm}} = E_{\text{cm}} = \sqrt{\mathbf{p}_{\text{cm}}^2 + m_e^2} \quad (\text{A.7.39})$$

$$\mathbf{k}_{1\text{cm}} = -\mathbf{k}_{2\text{cm}} = \mathbf{k}_{\text{cm}}, \quad \mathcal{E}_{1\text{cm}} = \mathcal{E}_{2\text{cm}} = \mathcal{E}_{\text{cm}} = |\mathbf{k}_{\text{cm}}| \quad (\text{A.7.40})$$

$E_{\text{cm}} = \mathcal{E}_{\text{cm}}$  в силу закона сохранения импульса.

Напомним определения трех кинематических лоренц-инвариантных переменных

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (k_1 + k_2)^2 = 2(k_1 k_2) = 2(\mathcal{E}_{\text{cm}}^2 + \mathbf{k}_{\text{cm}}^2) = 4\mathcal{E}_{\text{cm}}^2 \quad (\text{A.7.41})$$

$$\hookrightarrow = 2m_e^2 + 2(p_1 p_2) = 2m_e^2 + 2(E_{\text{cm}}^2 + \mathbf{p}_{\text{cm}}^2) = 4E_{\text{cm}}^2 \quad (\text{A.7.42})$$

$$t = (p_1 - k_1)^2 = (p_2 - k_2)^2 = m_e^2 - 2(E_{\text{cm}}^2 - |\mathbf{p}_{\text{cm}}| \mathcal{E}_{\text{cm}} \cos \theta_{\text{cm}}) \quad (\text{A.7.43})$$

$$u = (p_1 - k_2)^2 = (p_2 - k_1)^2 = m_e^2 - 2(p_1 k_2) = m_e^2 - 2(p_2 k_1) \quad (\text{A.7.44})$$

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2 = 2m_e^2 \quad (\text{A.7.45})$$

$\theta_{\text{cm}}$  — угол между  $\mathbf{p}_{\text{cm}}$  и  $\mathbf{k}_{\text{cm}}$ . Из уравнения (A.7.42) получим:

$$|\mathbf{p}_{\text{cm}}| = \sqrt{\frac{s}{4} - m_e^2} \quad (\text{A.7.46})$$

Фактор  $\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_e^4}$  в дифференциальном сечении в с. ц. м. принимает следующий вид

$$\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_e^4} = |\mathbf{p}_{\text{cm}}| \sqrt{s} = \sqrt{\frac{s}{4} - m_e^2} \sqrt{s} = \frac{s}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}} \quad (\text{A.7.47})$$

Снимем интегрирование по  $d^3 k_2$  с помощью трехмерной  $\delta$ -функции в формуле (A.7.26),

$$d\sigma = \frac{(2\pi)\delta(2E_{\text{cm}} - 2\mathcal{E}_{\text{cm}})}{2s\sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}}} \frac{1}{4} \sum_s |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2\mathcal{E}_1} \frac{1}{2\mathcal{E}_2} \quad (\text{A.7.48})$$

Пределы изменения  $s$  и  $t$  (физическая область  $E_{\text{cm}} \in (m_e, +\infty)$ ,  $\theta_{\text{cm}} \in (0, \pi)$ ), используя (A.7.42), (A.7.43), получим

$$s \in (4m_e^2, +\infty) \quad (\text{A.7.49})$$

$$t \in (t_\pi, t_0) : \quad t_0(t_\pi) = m_e^2 - \frac{s}{2} \left( 1 \mp \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}} \right) \quad (\text{A.7.50})$$

Рассмотрим дифференциал  $d^3k_1$ , используя (A.7.41) и независимость сечения от угла  $\varphi$ ,

$$d^3k_1 = \mathbf{k}_{\text{cm}}^2 d|\mathbf{k}_{\text{cm}}| d\cos\theta_{\text{cm}} d\varphi = (2\pi)\mathcal{E}_{\text{cm}}^2 d\mathcal{E}_{\text{cm}} d\cos\theta_{\text{cm}} = (2\pi)\frac{s}{4} \frac{ds}{8\mathcal{E}_{\text{cm}}} d\cos\theta_{\text{cm}} = (2\pi)\sqrt{\frac{s}{4}} ds d\cos\theta_{\text{cm}} \quad (\text{A.7.51})$$

Из формулы (A.7.43) можно получить (ср. (A.7.47))

$$\frac{dt}{d\cos\theta_{\text{cm}}} = \frac{s}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}} \quad \Rightarrow \quad d^3k_1 = (2\pi)\sqrt{\frac{s}{4}} ds \left( \frac{s}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}} \right)^{-1} dt \quad (\text{A.7.52})$$

и дифференциальное сечение после небольших преобразований принимает следующий вид

$$d\sigma = \frac{(2\pi)\delta(2\sqrt{\frac{s}{4}} - 2\mathcal{E}_{\text{cm}})}{\sqrt{\frac{s}{4}}(1 - \frac{4m_e^2}{s})s^2} \frac{1}{4 \cdot 8(2\pi)^2} \sum_s |\mathcal{M}|^2 ds dt \quad (\text{A.7.53})$$

Снимем интегрирование по  $ds$ , используя формулу

$$\int dx f(x) \delta(g(x)) = \sum_{x_0} \frac{f(x_0)}{\left| \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0}} \quad (\text{A.7.54})$$

$x_0$  — нули функции  $g(x)$ , которые находятся в области интегрирования.

$$\frac{d}{ds} \left( 2\sqrt{\frac{s}{4}} - 2E_{\text{cm}} \right) = \frac{2}{\sqrt{s}} \quad (\text{A.7.55})$$

$$d\sigma = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{s}}\right)^{-1}}{\sqrt{\frac{s}{4}}s^2(1 - \frac{4m_e^2}{s})} \frac{1}{4 \cdot 8(2\pi)} \sum_s |\mathcal{M}|^2 dt \quad (\text{A.7.56})$$

(A.7.22) — формула  $\sum_s |\mathcal{M}|^2$  и из уравнений (A.7.41), (A.7.42), (A.7.43), (A.7.44)

$$(k_1 p_1) = (k_2 p_2) = \frac{1}{2}(m_e^2 - t) \quad (\text{A.7.57})$$

$$(k_1 p_2) = (k_2 p_1) = \frac{1}{2}(m_e^2 - u) = \frac{1}{2}(m_e^2 - (2m_e^2 - s - t)) = \frac{1}{2}(s + t - m_e^2) \quad (\text{A.7.58})$$

$$(k_1 k_2) = \frac{s}{2} \quad (\text{A.7.59})$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\pi s^2(1 - \frac{4m_e^2}{s})} g_V'^2 \left[ (1 + \lambda')^2 \left( \frac{1}{2}(m_e^2 - t) \right)^2 + (1 - \lambda')^2 \left( \frac{1}{2}(s + t - m_e^2) \right)^2 - (1 - \lambda'^2)m_e^2 \frac{s}{2} \right] \quad (\text{A.7.60})$$

Полученное сечение (A.7.60) в единицах  $\text{GeV}^{-4}$  показано на Рис. 42.

## Список литературы

- [1] C. Y. Cardall, “*Coherence of neutrino flavor mixing in quantum field theory,*” Phys. Rev. D **61**, 073006 (2000) [arXiv:hep-ph/9909332].
- [2] W. Grimus and P. Stockinger, “*Real Oscillations of Virtual Neutrinos,*” Phys. Rev. D **54**, 3414 (1996) [arXiv:hep-ph/9603430].
- [3] C. Giunti, C. W. Kim, J. A. Lee, and U. W. Lee, “*On the treatment of neutrino oscillations without resort to weak eigenstates,*” Phys. Rev. D **48**, 4310 (1993) [hep-ph/9305276].
- [4] J. E. Campagne, “*Neutrino oscillations from pion decay in flight,*” Phys. Lett. B **400**, 135 (1997).
- [5] K. Kiers and N. Weiss, “*Neutrino oscillations in a model with a source and detector,*” Phys. Rev. D **57**, 3091 (1998) [hep-ph/9710289].
- [6] W. Grimus, P. Stockinger, and S. Mohanty, “*The field-theoretical approach to coherence in neutrino oscillations,*” Phys. Rev. D **59**, 013011 (1999) [hep-ph/9807442].
- [7] A. Ioannisian and A. Pilaftsis, “*Neutrino oscillations in space within a solvable model,*” Phys. Rev. D **59**, 053003 (1999) [hep-ph/9809503].
- [8] W. Grimus, S. Mohanty and P. Stockinger, “*Field theoretical treatment of neutrino oscillations: The strength of the canonical oscillation formula,*” arXiv:hep-ph/9909341.
- [9] W. Grimus, S. Mohanty and P. Stockinger, “*Neutrino oscillations and the effect of the finite lifetime of the neutrino source,*” Phys. Rev. D **61**, 033001 (2000) [arXiv:hep-ph/9904285].
- [10] A. Y. Smirnov, “*Recent developments in neutrino phenomenology,*” [arXiv:hep-ph/0702061].
- [11] C. Giunti, “*Neutrino wave packets in quantum field theory,*” JHEP **0211**, 017 (2002) [arXiv:hep-ph/0205014].
- [12] M. Beuthe, “*Oscillations of neutrinos and mesons in quantum field theory,*” Phys. Rept. **375**, 105 (2003) [arXiv:hep-ph/0109119].
- [13] R. Davis, “*A Half-century with Solar Neutrinos,*” Nobel Lecture, 2002.
- [14] Ю. Комминс, Ф. Буксбаум, *Слабые взаимодействия лептонов и кварков*. М.: Энергоатомиздат, 1987.
- [15] Дж. Бакал, *Нейтринная астрофизика*. М.: Мир, 1993.
- [16] F. Reines, C. L. Cowan, F. B. Harrison, A. D. McGuire and H. W. Kruse, “*Detection Of The Free Anti-Neutrino,*” Phys. Rev. **117**, 159 (1960).  
F. Reines, “*The Neutrino: from Poltergeist to Particle,*” Nobel Lecture, 1995.
- [17] G. Danby, J. M. Gaillard, K. Goulian, L. M. Lederman, N. B. Mistry, M. Schwartz and J. Steinberger, “*Observation of high-energy neutrino reactions and the existence of two kinds of neutrinos,*” Phys. Rev. Lett. **9**, 36 (1962).
- [18] W.-M. Yao et al. (Particle Data Group), J. Phys. G **33**, 1 (2006).
- [19] T. Araki et al. (KamLAND), *Experimental investigation of geologically produced antineutrinos with KamLAND*, Nature **436** (2005) 499-503.
- [20] J.N. Bahcall, A.M. Serenelli, and S. Basu, Astrophys. J. **621**, L85 (2005).

- [21] <http://www.sns.ias.edu/~jnb/> — John Bahcall home page - Institute for Advanced Study.
- [22] K. Nakamura, *Solar Neutrinos Review*, 2005.  
[http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/solarnu\\_s067sol.pdf](http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/solarnu_s067sol.pdf)
- [23] J. G. Learned [Super-KamioKande Collaboration], “*The atmospheric neutrino anomaly: Muon neutrino disappearance,*” arXiv:hep-ex/0007056.
- [24] M. Honda, T. Kajita, K. Kasahara and S. Midorikawa, “*Calculation of the flux of atmospheric neutrinos,*” Phys. Rev. D **52**, 4985 (1995) [arXiv:hep-ph/9503439].
- [25] W. A. Mann, “*Atmospheric neutrinos and the oscillations bonanza,*” [arXiv:hep-ex/9912007].
- [26] K. Nakajima *et al.*, *A simple model of reactor cores for reactor neutrino flux calculations for the KamLAND experiment*, NUCL.INSTRUM.METH.A 569, p.837, arXiv.org:physics/0607126.
- [27] T. Araki *et al.* [KamLAND Collaboration], “*Measurement of neutrino oscillation with KamLAND: Evidence of spectral distortion,*” Phys. Rev. Lett. **94**, 081801 (2005) [arXiv:hep-ex/0406035].
- [28] Particle Data Group, Phys. Rev. **D66**, 010001-406 (2002).
- [29] K. Eguchi *et al.* [KamLAND Collaboration], “*First results from KamLAND: Evidence for reactor anti-neutrino disappearance,*” Phys. Rev. Lett. **90**, 021802 (2003) [arXiv:hep-ex/0212021].
- [30] G. L. Fogli *et al.*, Phys. Rev. **D66**, 053010 (2002).
- [31] В. С. Имшенник, Д. К. Надёжин, *CH1987A: наблюдения и теория*, УФН 156, 4, (1988).
- [32] G. B. Gelmini, “*Prospect for relic neutrino searches,*” Phys. Scripta **T121**, 131 (2005) [arXiv:hep-ph/0412305].
- [33] Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков, *Введение в теорию ранней Вселенной, ( в печати ) .* М.: 2006.
- [34] S. M. Bilenky, C. Giunti and W. Grimus, “*Phenomenology of neutrino oscillations,*” Prog. Part. Nucl. Phys. **43** (1999) 1 [arXiv:hep-ph/9812360].
- [35] С. М. Биленький, “*Смешивание и осцилляции нейтрино,*” ЭЧАЯ, **18**, 1987.
- [36] M. C. Gonzalez-Garcia and Y. Nir, “*Developments in neutrino physics,*” Rev. Mod. Phys. **75**, 345 (2003) [arXiv:hep-ph/0202058].
- [37] Y. Grossman, “*Neutrinos,*” arXiv:hep-ph/0305245.
- [38] S. P. Mikheev and A. Y. Smirnov, “*Neutrino oscillations in a variable-density medium and  $\nu$ -bursts due to the gravitational collapse of stars,*” Sov. Phys. JETP **64**, 4 (1986) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **91**, 7 (1986)] [arXiv:0706.0454 [hep-ph]].
- [39] С. П. Михеев, А. Ю. Смирнов, *Резонансные осцилляции нейтрино в веществе.* УФН Том 153, вып. 1, 1987.
- [40] L. Wolfenstein, “*Neutrino oscillations in matter,*” Phys. Rev. D **17**, 2369 (1978).
- [41] Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков, *Квантовые поля.*— М.: Физматлит, 2005.

- [42] Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, А.И. Оксак, И.Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*.— М.: Физматлит, 2005.
- [43] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *Introduction to Quantum Field Theory* (Reading, Addison-Wesley, 1995).
- [44] А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*.— М.: Наука, 1981.
- [45] M.L. Goldberger, K.M. Watson, *Collision Theory*.— John Wiley & Sons, Inc., 1969.
- [46] Дж. Д. Бъркен, С. Д. Дрелл, Релятивистская квантовая теория. Т. 1.: *Релятивистская квантовая механика*. М.: Наука, 1978.
- [47] С. Вайнберг. *Квантовая теория поля*. Т. 1. Общая теория. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
- [48] Д.В. Наумов, *Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов*.— М.: ( в печати ), 2007.
- [49] Д.А. Киржниц, *Нелокальная квантовая теория поля*, УФН, 90, выпуск 9 (1966).
- [50] M. Fukugita and T. Yanagida, *Physics of Neutrinos: and applications to astrophysics* (Springer-Verlag, 2003).
- [51] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теоретическая физика, Т. 2 *Теория поля*.— М.: Физматлит, 2003.
- [52] D. V. Naumov, V. A. Naumov, *Quantum Field Theory of Neutrino Oscillations in Vacuum and Matter*, XXX Workshop Neutrino at accelerators, Dubna, 2008.  
D. V. Naumov, V. A. Naumov, *Real Refraction of virtual neutrinos*, Dubna, *in preparation*.
- [53] Ц. Ли, Ц. Ву. *Слабые взаимодействия*.— М.: Мир, 1958.
- [54] E. Blucher *et al.*, “*Status of the Cabibbo angle*,” arXiv:hep-ph/0512039.  
new version available at  
[http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/vud\\_vus\\_s013233.pdf](http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/vud_vus_s013233.pdf)
- [55] R. Lazauskas, P. Vogel and C. Volpe, “*Charged current cross section for massive cosmological neutrinos impinging on radioactive nuclei*,” J. Phys. G **35**, 025001 (2008) [arXiv:0710.5312 [astro-ph]].
- [56] K. Kuzmin, V. Lyubushkin, and V. Naumov, *Notes to polarization studies, Internal notes*, Dubna-Firenze, 2005.
- [57] Y. Farzan and A. Y. Smirnov, “*Coherence and oscillations of cosmic neutrinos*,” arXiv:0803.0495 [hep-ph].
- [58] B. Kayser, *Neutrino mass, mixing and flavor change*. PDG, 2007.  
[<http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/numixrpp.pdf>]
- [59] A. Strumia and F. Vissani, “*Neutrino masses and mixings and*,” arXiv:hep-ph/0606054.
- [60] И. А. Квасников. Термодинамика и статистическая физика. Т. 2: *Теория равновесных систем: Статистическая физика*. М.: Едиториал УРСС, 2002.
- [61] A. D. Dolgov, “*Neutrinos in cosmology*,” Phys. Rept. **370**, 333 (2002) [arXiv:hep-ph/0202122].
- [62] A. G. Cocco, G. Mangano and M. Messina, “*Probing low energy neutrino backgrounds with neutrino capture on beta decaying nuclei*,” JCAP **0706**, 015 (2007) [arXiv:hep-ph/0703075].

- [63] A. G. Cocco, G. Mangano and M. Messina, “*Capturing Relic Neutrinos with beta-decaying nuclei*,” arXiv:0711.1762 [astro-ph].
- [64] B. Eberle, A. Ringwald, L. Song and T. J. Weiler, “*Relic neutrino absorption spectroscopy*,” Phys. Rev. D **70** (2004) 023007 [arXiv:hep-ph/0401203].
- [65] A. Ringwald, “*How to detect big bang relic neutrinos?*,” arXiv:hep-ph/0505024.
- [66] R. Wigmans, “*PeV cosmic rays: A window on the leptonic era?*,” Astropart. Phys. **19**, 379 (2003) [arXiv:astro-ph/0205360].
- [67] M. Blennow, “*Prospects for cosmic neutrino detection in tritium experiments in the case of hierarchical neutrino masses*,” arXiv:0803.3762 [astro-ph].
- [68] M. Fukugita and T. Kubota, “*Radiative corrections to neutrino nucleon quasielastic scattering*,” Acta Phys. Polon. B **35**, 1687 (2004) [arXiv:hep-ph/0403149].
- [69] J. M. Robson, “*The Radioactive Decay of the Neutron*,” Phys. Rev. **83**, 349 (1951).  
 J. M. Robson, “*Radioactive Decay of the Neutron*,” Phys. Rev. **78**, 311 (1950).  
 A. H. Snell, F. Pleasonton and R. V. McCord, “*Radioactive Decay of the Neutron*,” Phys. Rev. **78**, 310 (1950).
- [70] M. T. Burgy, V. E. Krohn, T. B. Novey, G. R. Ringo and V. L. Telegdi, “*Measurment of Spatial Asymmetries in the Decay of Polarized Neutrons*,” Phys. Rev. **120**, 1829 (1960).
- [71] V. A. Lee, *Quantum Field Theory of Neutrino Oscillations in Vacuum*, seminar LNP JINR, 2008. (<http://astronu.jinr.ru>)
- [72] Б.А. Ли, В.А. Наумов, Д.В. Наумов, *Рассеяние реликтовых нейтрино на нейтроне*, XII Научная конференция молодых ученых и специалистов ОИЯИ, 2008.
- [73] C. Giunti, M. Laveder, *Neutrino Unbound*, <http://www.nu.to.infn.it/>.
- [74] J. Linder, “*Derivation of neutrino matter potentials induced by earth*,” arXiv:hep-ph/0504264.
- [75] E. Holzschuh, “*Measurement Of The Neutrino Mass From Tritium Beta Decay*,” Rept. Prog. Phys. **55**, 1035 (1992).