

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования

"ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

(ФГБОУ ВПО "ИГУ")

---

Объединенный институт ядерных исследований  
Лаборатория ядерных проблем им. В. П. Дзелепова

Физический факультет

Кафедра теоретической физики

Зав. кафедрой, профессор

Валл А. Н. \_\_\_\_\_

Физический факультет

Кафедра общей и космической физики

Зав. кафедрой, профессор

Паперный В. Л. \_\_\_\_\_

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА  
**Космологические нейтрино**

Руководитель:

\_\_\_\_\_ к.ф.-м.н. Наумов Д. В. (ОИЯИ)

Студентка гр. 01511-ДС

\_\_\_\_\_ Батозская В. С.

Работа защищена с оценкой \_\_\_\_\_

“\_\_” июня 2011 г.

Протокол \_\_\_\_\_

Нормоконтролер

\_\_\_\_\_ Первалова И. А.

Рецензент:

\_\_\_\_\_ к.ф.-м.н. Гладышев А. В. (ОИЯИ)

Дубна – Иркутск 2011 г.

## Реферат

Целью работы являлось изучение ранней стадии эволюции Вселенной, рассмотрение первичной электромагнитной плазмы и оценка времени, температуры и плотности числа нейтрино на момент выхода его из термодинамического равновесия, сравнение функций распределения плотности числа нейтрино для двух случаев: флейворного и массивного.

Рассмотрена кинетическая эволюция в ранней Вселенной нейтрино до полного выхода из равновесия. Проведены численные расчеты уравнения Больцмана для полной функции распределения нейтрино  $f(x, y)$  и для малой поправки  $\delta(x, y)$  к равновесию  $f_{\nu_j}(x, y) = f_{\nu_j}^{eq}(y)(1 + \delta_j(x, y))$ , где  $f_{\nu_j}^{eq} = [\exp(E/T_\nu) + 1]^{-1}$ . Посчитано значение отношения между температурами фотонов и нейтрино, которое немного меньше, чем в обычном случае, благодаря малой передаче энергии от электромагнитной плазмы к нейтрино в процессах  $e^+e^- \rightarrow \nu\bar{\nu}$ .

Работа содержит 49 страниц машинописного текста, 3 рисунка, 3 таблицы, список использованных источников из 12 наименований, приложения на 8 страницах.

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	2
<b>Глава 1. Космология</b> . . . . .	4
1.1. Однородные изотропные пространства . . . . .	4
1.2. Метрика Фридмана-Робертсона-Уокера . . . . .	6
1.3. Уравнение Фридмана . . . . .	8
1.4. Плотность энергии и давление фермионов и бозонов . . . . .	14
1.5. Кинетическое уравнение Больцмана . . . . .	16
<b>Глава 2. Кинетическое уравнение Больцмана</b> . . . . .	20
2.1. Температура закалки и время выхода из равновесия нейтрино . . . . .	20
2.2. Эффективная температура нейтрино . . . . .	21
2.3. Уравнение Больцмана . . . . .	22
2.4. Основные уравнения . . . . .	24
2.5. Вычисление $ M ^2$ для флейворных и массивных нейтрино . . . . .	27
<b>Глава 3. Результаты</b> . . . . .	32
<b>Заключение</b> . . . . .	38
<b>Литература</b> . . . . .	39
<b>Литература</b> . . . . .	40
<b>Приложение А. Формулы для вычисления определенных интегралов</b> . . . . .	41
<b>Приложение Б. Вычисление интеграла столкновений</b> . . . . .	42

# Введение

Большая часть истории Вселенной описывается равновесной термодинамикой. Однако, ряд важных отклонений от равновесия имеет место в истории Вселенной: “закалка“ фотонов, первичный нуклеосинтез, бариогенезис, и, возможно, стадия инфляции. К отклонениям от равновесия также можно адресовать нейтрино и слабые взаимодействия.

Около секунды после Большого взрыва, скорости слабых взаимодействий, которые удерживают нейтрино в тепловом равновесии с электромагнитной плазмой ( $e^\pm, \gamma$ ),  $\nu + e^\pm \leftrightarrow \nu + e^\pm$ ,  $\nu + \bar{\nu} \leftrightarrow e^- + e^+$ ,  $\nu + \nu \leftrightarrow \nu + \nu$ ,  $\nu + \bar{\nu} \leftrightarrow \nu + \bar{\nu}$ , а также те, которые сохраняют равновесное значение нейтрон-протонного отношения,  $\nu_e + n \leftrightarrow p + e^-$ ,  $\bar{\nu}_e + p \leftrightarrow n + e^+$ , и в меньшей степени,  $n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ , становятся малоэффективными. В результате первичный нуклеосинтез зависит от того факта, что часть нейтронов и протонов, существовавшие в космической плазме по-отдельности, начинают объединяться в ядра, по причине охлаждения Вселенной за счет ее расширения. Таким образом, наряду с водородом во Вселенной образовывался в основном первичный  ${}^4\text{He}$ , а также небольшое количество дейтерия ( ${}^2\text{H}$ ), гелия-3 ( ${}^3\text{He}$ ) и лития-7 ( ${}^7\text{Li}$ ). Эпоха первичного нуклеосинтеза охватывает период примерно от 1 до 300 секунд с момента Большого взрыва, соответствующие температуры - от 1 МэВ до 50 кэВ.

Согласно современным результатам, электронные нейтрино вышли из равновесия при температуре около 2 МэВ и  $\mu$ - и  $\tau$ -нейтрино при температуре около 3-4 МэВ, до аннигиляции  $e^\pm$ -пар ( $T \sim 0.1$  МэВ), и, таким образом, они не участвуют в передаче энтропии от  $e^\pm$ -пар к фотонам, которые подогреваются относительно нейтрино. По этой причине, в настоящее время, температура нейтрино ниже, чем температура фотонов. А именно, после выхода нейтрино из равновесия их распределение остается равновесным с температурой, которая пропорциональна обратной величине масштабного фактора  $a(t)$ . Закон сохранения энтропии предполагает, что температура фотонов изменяется как  $g_*^{-1/3} a^{-1}(t)$  ( $g_*$  - число степеней свободы в тепловом равновесии с фотонами). Поскольку  $g_*$  падает от  $\frac{11}{2}$  до аннигиляции  $e^\pm$ -пар до 2, температура фотонов на современном этапе выше температуры нейтрино:  $T_\nu/T_\gamma = (4/11)^{1/3}$ .

В данной дипломной работе рассмотрена кинетическая эволюция в ранней Вселенной нейтрино до полного выхода из термодинамического равновесия. Проведены численные расчеты уравнения Больцмана для полной функции распределения нейтрино  $f(x, y)$  и для малой поправки  $\delta(x, y)$  к равновесию  $f_{\nu_j}(x, y) = f_{\nu_j}^{eq}(y)(1 + \delta_j(x, y))$ , где  $f_{\nu_j}^{eq} = [\exp(E/T_\nu) + 1]^{-1}$ . Посчитано значение отношения между температурами фотонов и нейтрино, которое немно-

го меньше, чем в обычном случае, благодаря малой передаче энергии от электромагнитной плазмы к нейтрино в процессах  $e^+e^- \rightarrow \nu\bar{\nu}$ .

# Глава 1

## Космология

### 1.1. Однородные изотропные пространства

С высокой степенью точности наша Вселенная пространственно однородна и изотропна на достаточно больших масштабах. Это означает, что в фиксированный момент времени геометрия пространства - это геометрия однородного и изотропного трехмерного многообразия. Таких многообразий существует всего три: трехмерная сфера, трехмерное евклидово пространство (3-плоскость) и трехмерный гиперboloид. Геометрию трехмерной сферы проще всего понять, представив ее вложенной в (фиктивное с точки зрения физики) четырехмерное евклидово пространство и записав уравнение 3-сферы в виде

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 + (y^4)^2 = R^2, \quad (1.1)$$

где  $y^\alpha$  ( $\alpha=1,\dots,4$ ) - координаты четырехмерного евклидова пространства, а  $R$  - радиус 3-сферы. Введем на 3-сфере сферические углы  $\chi$ ,  $\theta$  и  $\phi$ , так что

$$\begin{aligned} y^1 &= R \cos \chi, \\ y^2 &= R \sin \chi \cos \theta, \\ y^3 &= R \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \\ y^4 &= R \sin \chi \sin \theta \sin \phi. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Тогда расстояние между двумя точками на 3-сфере, имеющими координаты  $(\chi, \theta, \phi)$  и  $(\chi + d\chi, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$  будет равно

$$dl^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 + (dy^4)^2. \quad (1.3)$$

После вычисления получим, что метрика трехмерной сферы имеет вид

3-сфера:

$$dl^2 = R^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (1.4)$$

Аналогично 3-сфере, трехмерный гиперboloид удобно представлять себе вложенным в фиктивное четырехмерное пространство Минковского с метрикой

$$ds^2 = -(dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 + (dy^4)^2, \quad (1.5)$$

при этом уравнение гиперboloида имеет вид

$$(y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 - (y^4)^2 = R^2, \quad (1.6)$$

и одна из компонент связности  $y^1 > 0$ .

Координаты на 3-гиперboloиде можно ввести по аналогии с (1.2):

$$\begin{aligned} y^1 &= R \operatorname{ch} \chi, \\ y^2 &= R \operatorname{sh} \chi \cos \theta, \\ y^3 &= R \operatorname{sh} \chi \sin \theta \cos \phi, \\ y^4 &= R \operatorname{sh} \chi \sin \theta \sin \phi. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Вычисление расстояния между двумя точками на гиперboloиде дает

3-гиперboloид:

$$dl^2 = R^2[d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (1.8)$$

Для полноты запишем и метрику 3-плоскости (трехмерного евклидова пространства)

3-плоскость:

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (1.9)$$

Одним из характерных свойств однородных и изотропных пространств является то, что все ковариантные геометрические величины выражаются через метрический тензор трехмерного пространства  $\gamma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). При этом коэффициенты перед соответствующими комбинациями тензора  $\gamma_{ij}$  не зависят от координат. В частности, тензор Римана трехмерного однородного изотропного пространства равен

$${}^{(3)}R_{ijkl} = \frac{k}{R^2}(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}), \quad (1.10)$$

где параметр  $k = +1$  для 3-сферы, 0 для 3-плоскости и -1 для 3-гиперboloида.

Из (1.10) следует, что тензор Риччи равен

$${}^{(3)}R_{ij} = 2\frac{k}{R^2}\gamma_{ij}, \quad (1.11)$$

а скаляр кривизны постоянен в пространстве и равен

$$R = 6\frac{k}{R^2}. \quad (1.12)$$

Метрикам 3-сферы, 3-плоскости и 3-гиперболоида можно придать унифицированный вид. Для этого введем координату  $\rho = R\chi$  для сферы и гиперболоида и сферические координаты  $(\rho, \theta, \phi)$  для плоскости, метрики (1.4), (1.8) и (1.9) представим в виде

$$dl^2 = d\rho^2 + r^2(\rho)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.13)$$

где  $r(\rho) = R \sin(\rho/R)$  для 3-сферы,  $\rho$  для 3-плоскости и  $R \operatorname{sh}(\rho/R)$  для 3-гиперболоида.

Величины, входящие в формулу (1.13), можно интерпретировать как:  $\rho$  - это кратчайшее (геодезическое) расстояние от произвольно выбранного начала координат до точки с координатами  $(\rho, \theta, \phi)$ , а  $r(\rho)$  - определяет площадь двумерной сферы, находящейся на расстоянии  $\rho$  от начала координат,  $S = 4\pi r^2(\rho)$ .

В качестве радиальной координаты можно вместо  $\rho$  выбрать  $r$ , тогда получим для гиперболоида

$$d\rho^2 = \frac{dr^2}{\operatorname{ch}^2 \frac{\rho}{R^2}} = \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{R^2}},$$

так что метрика приобретает вид

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + k \frac{r^2}{R^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.14)$$

где параметр  $k$  определен ранее.

## 1.2. Метрика Фридмана-Робертсона-Уокера

Расширяющаяся однородная изотропная Вселенная описывается метрикой Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dl^2. \quad (1.15)$$

Пространственная часть метрики может быть записана как

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (1.16)$$

где  $\gamma_{ij}(x)$  - метрика единичной 3-сферы, единичного 3-гиперболоида или 3-плоскости (метрика (1.14) с  $R = 1$ ).  $\gamma^{ij}\gamma_{ij} = 3$ .

Метрику (1.15) называют метрикой Фридмана-Робертсона-Уокера, и говорят о замкнутой (пространство - это 3-сфера,  $k = +1$ ), открытой (пространство - это 3-гиперболоид,  $k = -1$ ) и плоской Вселенной (пространство - это 3-плоскость,  $k = 0$ ). В случаях замкнутой и открытой Вселенной масштабный фактор  $a(t)$  в каждый фиксированный момент времени имеет смысл

радиуса кривизны пространства. В случае же пространственно плоской Вселенной сам по себе масштабный фактор физического смысла не имеет, поскольку в фиксированный момент времени его можно сделать равным любому наперед заданному числу (например, единице) растяжением пространственных координат. Физический смысл в плоской Вселенной имеет отношение масштабных факторов в различные моменты времени  $a(t_1)/a(t_2)$  и параметр Хаббла

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}.$$

Здесь и далее точка означает производную по времени.

Метрика однородной изотропной Вселенной имеет вид (1.15) в определенной системе отсчета, которая выделена тем, что в каждый фиксированный момент времени пространство выглядит одинаково в разных областях Вселенной. Эта система отсчета является к тому же сопутствующей: мировые линии частиц, покоящихся в этой системе отсчета, являются геодезическими, т.е. такие частицы свободны. Временная координата  $t$  для таких частиц имеет смысл собственного времени покоящихся частиц, т.е.  $ds^2 = dt^2$ . В современной Вселенной в качестве таких покоящихся частиц выступают галактики, если не брать во внимание их локальное (пекулярное) движение, обусловленное локальными гравитационными потенциалами (например, созданное близкими галактиками).

Мировая линия  $x^i = const$  удовлетворяет уравнению геодезической в метрике (1.15),

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu u^\lambda = 0, \quad (1.17)$$

где  $u^\mu = (u^0, u^i)$  - четырехскорость,  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$  - символ Кристоффеля.

Единственной отличной от нуля компонентой четырехскорости  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$  для покоящейся частицы является

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{dt}{dt} = 1.$$

Из уравнения (1.17) следует, что  $du^\mu/ds = 0$ , т.к.  $\Gamma_{00}^\mu = 0$  для любого  $\mu$ .

Теперь вычислим символы Кристоффеля

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\lambda}). \quad (1.18)$$

Компоненты метрического тензора равны

$$g_{00} = 1, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = -a^2(t)\gamma_{ij}(x),$$

а для обратного тензора имеем

$$g^{00} = 1, \quad g^{0i} = 0, \quad g^{ij} = -\frac{1}{a^2(t)}\gamma^{ij}(x).$$

Приведем еще некоторые свойства метрического тензора

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k, \quad g_{00}g^{00} = 1,$$

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^\rho g_{\rho\lambda} + \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\nu\rho},$$

$$\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = 0, \quad \partial_\mu g_{00} = 0.$$

Получаем, что

$$\Gamma_{00}^0 = 0, \quad \Gamma_{0i}^0 = 0, \quad \Gamma_{00}^i = 0.$$

(в выражении (1.18) по крайней мере два индекса должны принимать нулевое значение). Для ненулевых компонент символов Кристоффеля имеем

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i, \quad (1.19)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\gamma_{ij}, \quad (1.20)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}\gamma^{il}(\partial_j\gamma_{kl} + \partial_k\gamma_{jl} - \partial_l\gamma_{jk}) = {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i. \quad (1.21)$$

Отметим, что и для замкнутой, и для открытой модели нередко можно пренебречь пространственной кривизной и использовать пространственно-плоскую метрику

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij}. \quad (1.22)$$

Это во всяком случае законно, если рассматриваются пространственные расстояния, много меньшие радиуса пространственной кривизны  $a(t)$ .

### 1.3. Уравнение Фридмана

Закон расширения Вселенной, т.е. зависимость масштабного фактора  $a$  от времени, определяется уравнениями Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu},$$

где  $R_{\mu\nu}$  - тензор Риччи,  $T_{\mu\nu}$  - тензор энергии-импульса для всех полей. Найдем их явный вид для однородной изотропной метрики (1.15). Вычислим для этого тензор Риччи. По определению он равен

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\mu\Gamma_{\nu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda\Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma. \quad (1.23)$$

Отличные от нуля компоненты символов Кристоффеля даются формулами (1.19 - 1.21). Из них, в частности, следует, что

$$\begin{aligned}\Gamma_{0\mu}^\mu &= \frac{\dot{a}}{a} \delta_i^i = 3 \frac{\dot{a}}{a}, \\ \Gamma_{i\mu}^\mu &= {}^{(3)}\Gamma_{ij}^j, \\ \Gamma_{ij}^0 &= a \dot{a} \gamma_{ij}.\end{aligned}$$

Вычислим  $R_{00}$ . Поскольку символ Кристоффеля равен нулю, если, по крайней мере, два индекса принимают нулевые значения, следовательно вклад дают только второе и четвертое слагаемые в (1.23), тогда получаем

$$\begin{aligned}R_{00} &= -\partial_0 \Gamma_{0\lambda}^\lambda - \Gamma_{0\sigma}^\lambda \Gamma_{0\lambda}^\sigma = -\partial_0 \left( 3 \frac{\dot{a}}{a} \right) - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \delta_j^i \delta_i^j = -3 \left( \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} \right) - 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2. \\ R_{00} &= -3 \frac{\ddot{a}}{a}.\end{aligned}\tag{1.24}$$

Перейдем теперь к смешанным компонентам  $R_{0i}$ . Учитывая в (1.23) только ненулевые символы Кристоффеля, запишем

$$R_{0i} = \partial_j \Gamma_{0i}^j - \partial_0 \Gamma_{i\lambda}^\lambda + \Gamma_{0i}^j \Gamma_{j\lambda}^\lambda - \Gamma_{0j}^k \Gamma_{ik}^j.\tag{1.25}$$

Это выражение равно нулю, т.к.  $\Gamma_{0i}^j$  не зависит от пространственных координат,  $\Gamma_{i\lambda}^\lambda = {}^{(3)}\Gamma_{ij}^j$  вычисляются по статистической метрике  $\gamma_{ij}$  и не зависят от времени, а  $\Gamma_{0i}^j \propto \delta_i^j$ , что приводит к сокращению двух последних слагаемых в (1.25). Итак,

$$R_{0i} = 0.\tag{1.26}$$

Этого и следовало ожидать, поскольку  $R_{0i}$  преобразуются как компоненты трехвектора относительно трехмерных вращений, а в изотропном пространстве выделенного вектора нет.

Теперь вычислим пространственные компоненты  $R_{ij}$ . Вновь сохраним только не нулевые символы Кристоффеля в (1.23) и запишем

$$R_{ij} = (\partial_0 \Gamma_{ij}^0 + \partial_k \Gamma_{ij}^k) - \partial_i \Gamma_{j\lambda}^\lambda + (\Gamma_{ij}^0 \Gamma_{0\sigma}^\sigma + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{k\sigma}^\sigma) - (\Gamma_{ik}^0 \Gamma_{j0}^k + \Gamma_{i0}^k \Gamma_{jk}^0 + \Gamma_{il}^k \Gamma_{jk}^l),\tag{1.27}$$

где в скобках собраны слагаемые, возникающие из каждого четырех членов в (1.23). Учитывая (1.21), соберем слагаемые в (1.27), содержащие только пространственные индексы, в тензор Риччи  ${}^{(3)}R_{ij}$ , вычисленный по трехмерной метрике  $\gamma_{ij}$ . Остальные четыре слагаемых вычисляются непосредственно, и получаем

$$R_{ij} = \partial_0(\dot{a}a)\gamma_{ij} + \dot{a}a\gamma_{ij} \cdot 3 \frac{\dot{a}}{a} - \dot{a}a\gamma_{ik} \cdot \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^k - \frac{\dot{a}}{a} \delta_i^k \dot{a}a\gamma_{jk} + {}^{(3)}R_{ij}.$$

Окончательно, имеем выражение

$$R_{ij} = (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k)\gamma_{ij}, \quad (1.28)$$

где воспользовались соотношением (1.11).

Используем формулы (1.24), (1.26) и (1.28), чтобы найти скалярную кривизну

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{ij} R_{ij} = R_{00} - \frac{1}{a^2} \gamma^{ij} R_{ij} = -6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right).$$

В результате (00)- и (ij)-компонента левой части уравнений Эйнштейна имеет вид

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 3 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right),$$

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{00} R = -(\dot{a}^2 + 2\ddot{a}a + k)\gamma_{ij}.$$

Обратимся теперь к правой части уравнения Эйнштейна. На интересующих нас здесь этапах эволюции Вселенной пригодно макроскопическое описание вещества с помощью усредненного гидродинамического тензора энергии-импульса. Чтобы получить явное выражение для этой величины в искривленном пространстве-времени, рассмотрим сначала случай плоского пространства. Изотропное покоящееся как целое вещество без внутренних вращений имеет в плоском пространстве-времени тензор энергии-импульса вида

$$T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p). \quad (1.29)$$

Обобщим это выражение на случай, когда вещество не находится в состоянии покоя. В этом случае тензор энергии-импульса помимо зависимости от плотности  $\rho$  и давления  $p$  должен также содержать зависимость от вектора 4-скорости  $u^\mu$ . Чтобы найти эту зависимость, заметим, что в системе покоя вектор 4-скорости равен

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0).$$

Следовательно, если мы определим тензорную величину выражением

$$(p + \rho)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu}, \quad (1.30)$$

(где  $\eta^{\mu\nu}$  - метрика пространства Минковского) то она совпадает в системе покоя с тензором энергии-импульса (1.29). Поскольку обе величины преобразуются по тензорному закону, то они совпадают и во всех остальных системах отсчета. Чтобы обобщить выражение (1.30) на случай искривленного пространства, надо заменить метрику пространства Минковского  $\eta^{\mu\nu}$

на произвольную метрику  $g^{\mu\nu}$ . Для каждой выбранной точки пространства-времени существует локально-лоренцева система отсчета. В этой системе метрический тензор в данной точке совпадает с тензором Минковского, а тензор энергии-импульса вещества в не слишком сильном гравитационном поле имеет вид (1.30). Переходя в произвольную систему отсчета, мы приходим к следующему окончательному выражению для тензора энергии-импульса

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (1.31)$$

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}T^{\lambda\sigma} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}. \quad (1.32)$$

Данные выражения справедливы только в случае слабого гравитационного поля. В случае сильного поля в (1.31-1.32) могут появляться дополнительные члены, зависящие от тензора кривизны.

Вычислим тензор энергии-импульса. По определению он равен (1.32), тогда расписывая тензор энергии-импульса по компонентам, получим

$$T_{00} = (p + \rho)u_0 u_0 - pg_{00} = \rho,$$

$$T_{0i} = (p + \rho)u_0 u_i - pg_{0i} = 0,$$

$$T_{ij} = (p + \rho)u_i u_j - pg_{ij} = -pg_{ij} = a^2(t)\gamma_{ij}p.$$

Сохранение энергии-импульса происходит в любом объеме  $V$

$$d(\rho V) + pdV = 0 \Leftrightarrow d[V(\rho + p)] = Vdp.$$

Это есть первый закон термодинамики

$$dQ = dU + dA,$$

где  $dQ = 0$  - тепло, даваемое системе,  $dU = d(\rho V)$  - это изменение внутренней энергии и  $dA = d(pV)$  - есть работа, совершаемая системой.

Как было рассмотрено ранее, (00)-компонента уравнений Эйнштейна в однородной изотропной Вселенной имеет вид

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (1.33)$$

Это уравнение называют уравнением Фридмана; оно связывает темп расширения Вселенной, т.е. параметр Хаббла  $H = \dot{a}/a$ , с плотностью энергии материи  $\rho$  и пространственной кривизной  $k$ .

Запишем уравнения Эйнштейна для пространственных компонент:

$$-\left(\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{k}{a^2}\right) = 8\pi G\rho. \quad (1.34)$$

Складывая уравнения (1.33) и (1.34), получим уравнение для ускорения  $\ddot{a}$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (1.35)$$

В наши дни  $\dot{a} \geq 0$ ; если в прошлом  $(\rho + 3p)$  было всегда положительным, тогда  $\ddot{a}$  было всегда отрицательным, и следовательно в некоторое конечное время в прошлом масштабный фактор  $a(t)$  мог быть равен 0. Это событие называют большим взрывом, его определяют как начало времени.

Дифференцируя уравнение (1.33) по времени и подставляя в него (1.35), получим

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$$

или

$$a\frac{d\rho}{da} = -3(\rho + p). \quad (1.36)$$

Полученные уравнения Эйнштейна (1.33) и (1.34) необходимо дополнить еще одним уравнением, поскольку в них содержатся неизвестные функции времени  $a(t)$ ,  $\rho(t)$  и  $p(t)$ . Для получения дополнительного уравнения удобно рассмотреть условие ковариантного сохранения тензора энергии-импульса вещества

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0.$$

Пологая здесь  $\nu = 0$ , будем иметь

$$\nabla_{\mu}T^{\mu 0} \equiv \partial_{\mu}T^{\mu 0} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\mu}T^{\sigma 0} + \Gamma_{\mu\sigma}^0T^{\mu\sigma} = 0. \quad (1.37)$$

Ненулевые компоненты тензора энергии-импульса в сопутствующей системе отсчета равны

$$T^{00} = g^{00}g^{00}T_{00} = \rho, \quad (1.38)$$

$$T^{ij} = g^{ik}g^{jl}T_{kl} = g^{ik}g^{jl}(-g_{kl}p) = \frac{1}{a^2}\gamma^{ij}p. \quad (1.39)$$

Здесь воспользовались тем, что пространственные компоненты четырехскорости равны нулю в сопутствующей системе отсчета, так что  $T_{ij} = (p + \rho)u_iu_j - pg_{ij} = -pg_{ij}$ . В формуле (1.39) величины  $\gamma^{ij}$  - это не зависящие от времени компоненты матрицы, обратной  $\gamma_{ij}$ . Вновь воспользуемся выражениями для ненулевых компонент символов Кристоффеля (1.19 - 1.21) и запишем уравнение (1.37) в явном виде

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (1.40)$$

Для замыкания системы уравнений, определяющих динамику эволюции однородной изотропной Вселенной, необходимо задать еще уравнение состояния материи

$$p = w\rho, \quad (1.41)$$

где  $w$  не зависит от времени. Это уравнение не является следствием уравнений общей теории относительности, а определяется тем, какое вещество присутствует во Вселенной. Плотность энергии эволюционирует как

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (1.42)$$

Например, для нерелятивистских частиц

$$w = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \propto a^{-3},$$

для ультрарелятивистского вещества

$$w = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \rho \propto a^{-4},$$

для вакуума

$$w = -1 \quad \Rightarrow \quad \rho \propto \text{const}.$$

Уравнения (1.33), (1.40) и (1.41) полностью определяют динамику расширения Вселенной. Если вещество находится в термодинамическом равновесии, то уравнение (1.40) допускает следующую интерпретацию. Его можно записать в виде

$$\frac{d\rho}{\rho + p} = -3d(\ln a).$$

Левая часть этого соотношения совпадает с  $d(\ln s)$  ( $s$  - плотность энтропии). Поэтому уравнение (1.40) сводится к соотношению

$$sa^3 = \text{const},$$

которое означает сохранение энтропии в сопутствующем объеме. Иными словами, при расширении Вселенной плотность энтропии падает из-за растяжения пространства, как элемент пространственного объема

$$s = \frac{\text{const}}{a^3}.$$

## 1.4. Плотность энергии и давление фермионов и бозонов

В космической плазме взаимодействия между частицами довольно слабы. В этом случае равновесные функции распределения частиц по импульсам  $\mathbf{p}$  в локально-лоренцевой системе координат равны функциям распределения идеальных бозе- и ферми-газов:

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{(E(\mathbf{p})-\mu)/T} \mp 1}. \quad (1.43)$$

Здесь

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (1.44)$$

есть энергия частиц массы  $m$  и  $T$  - температура среды. Знак “-“ в формуле (1.43) относится к частицам, подчиняющимся статистике Бозе, а знак “+” - к частицам, подчиняющимся статистике Ферми.

Проинтегрировав функцию распределения по импульсам, получаем следующее общее выражение для плотности числа частиц  $i$ -го типа

$$n_i = g_i \int f(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} = 4\pi g_i \int f(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E dE, \quad (1.45)$$

где во втором равенстве проинтегрировали по углам и воспользовались соотношением

$$E dE = |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|, \quad (1.46)$$

вытекающим из релятивистского дисперсионного соотношения (1.44). Множитель  $g_i$  в (1.45) равен числу спиновых состояний данного типа частиц. К примеру, для фотонов, электронов и позитронов

$$g_\gamma = g_{e^-} = g_{e^+} = 2,$$

а для нейтрино и антинейтрино

$$g_\nu = g_{\bar{\nu}} = 1.$$

Из явного вида функции распределения (1.43) следует, что разность чисел частиц и античастиц данного типа в единице объема зависит от значения химического потенциала. При достаточно высоких температурах во Вселенной разность чисел частиц и античастиц крайне мала по сравнению с самим числом частиц. К примеру, при  $T \geq 1$  ГэВ для частиц с барионным зарядом (при таких температурах это кварки и антикварки) имеем

$$\frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_B + n_{\bar{B}}} \sim 10^{-10}.$$

Относительная разность чисел электронов и позитронов имеет тот же порядок величины (Вселенная в целом электрически нейтральна, поэтому избыточный положительный заряд, содержащийся в кварках, в точности компенсируется избыточным отрицательным зарядом в электронах). Следовательно, химические потенциалы крайне малы в ранней Вселенной, и для многих целей ими можно пренебречь.

Плотность энергии  $\rho_i$  частиц  $i$ -го типа дается следующим интегралом от функции распределения

$$\rho_i = g_i \int f(\mathbf{p}) E(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} = 4\pi g_i \int f(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E^2 dE, \quad (1.47)$$

где во втором равенстве, как и в соотношении (1.45), проинтегрировали по углам и воспользовались (1.46).

Чтобы найти выражение для давления среды, рассмотрим маленькую площадку  $\Delta S$ , расположенную перпендикулярно оси  $z$ . Количество частиц с импульсами в интервале от  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ , налетающих с одной стороны на эту площадку за время  $\Delta t$ , равно

$$\Delta n = v_z f(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} \Delta S \Delta t,$$

где

$$v_z = \frac{p_z}{E} > 0$$

- проекция скорости частицы на ось  $z$ . Частица с проекцией импульса  $p_z$  при упругом отражении от площадки передает ей импульс в направлении оси  $z$ , равный

$$\Delta p_z = 2p_z.$$

Следовательно, давление, равное отношению полного импульса, полученного площадкой, к времени  $\Delta t$  и площади  $\Delta S$ , имеет вид

$$\begin{aligned} p_i &= g_i \int_{p_z > 0} 2 \frac{p_z^2}{E} f(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} = \\ &= \frac{4\pi g_i}{3} \int_0^\infty \frac{|\mathbf{p}|^4 d|\mathbf{p}|}{E(\mathbf{p})} f(\mathbf{p}) = \frac{4\pi g_i}{3} \int_0^\infty f(E) (E^2 - m_i^2)^{3/2} dE, \end{aligned} \quad (1.48)$$

где учитываем, что только половина частиц движется в сторону рассматриваемой площадки, и воспользовались тем, что в силу изотропии системы можно заменить  $p_z^2$  на

$$\frac{1}{3} \mathbf{p}^2 = \frac{1}{3} (E^2 - m^2).$$

Для случая ультрарелятивистских частиц  $T \gg m_i$  с нулевым химическим потенциалом  $\mu_i = 0$ . В этом пределе выражение (1.47) для плотности энергии принимает вид

$$\rho_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int \frac{E^3}{e^{E/T} \mp 1} dE = \begin{cases} g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & \text{– Бозе - Эйнштейн;} \\ \frac{7}{8} g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & \text{– Ферми - Дирак.} \end{cases} \quad (1.49)$$

Формулы для вычисления в этом разделе интегралов приведены в Приложении А.

Если в плазме имеются ультрарелятивистские частицы различных типов и с одной и той же температурой  $T$ , а химическими потенциалами можно пренебречь, то плотность энергии ультрарелятивистской компоненты равна

$$\rho = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4,$$

где

$$g_* = \sum_{\text{бозоны с } m \ll T} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\text{фермионы с } m \ll T} g_i$$

эффективное число степеней свободы.

Выражение (1.48) для давления в ультрарелятивистском случае имеет вид

$$p_i = \frac{g_i}{6\pi^2} \int \frac{E^3}{e^{E/T} \mp 1} dE = \frac{\rho_i}{3}. \quad (1.50)$$

Таким образом, уравнение состояния ультрарелятивистского вещества имеет форму

$$p = \frac{1}{3} \rho.$$

Выражение (1.45) для плотности числа частиц в ультрарелятивистском случае имеет вид

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int \frac{E^2}{\exp^{E/T} \mp 1} dE = \begin{cases} g_i \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & \text{– Бозе - Эйнштейн;} \\ \frac{3}{4} g_i \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & \text{– Ферми - Дирак.} \end{cases} \quad (1.51)$$

Численное значение  $\zeta$ -функции равно  $\zeta(3) \approx 1.2$ .

## 1.5. Кинетическое уравнение Больцмана

Если столкновениями частиц можно было бы пренебречь вовсе, то каждая частица газа представляла бы собой замкнутую подсистему и для функции распределения была бы справедлива теорема Лиувилля, в силу которой

$$\frac{df}{dt} = 0. \quad (1.52)$$

Полная производная означает здесь дифференцирование вдоль фазовой траектории частицы, определяемой ее уравнениями движения. Теорема Лиувилля имеет место для функции распределения, определенной именно как плотность в фазовом пространстве.

В отсутствии внешнего поля величины  $\Gamma$  (некоторое значение движущихся частиц) свободно движущейся частицы остаются постоянными и меняются только ее координаты  $\mathbf{r}$ , при этом

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f. \quad (1.53)$$

Если же газ находится во внешнем поле  $U(\mathbf{r})$ , действующем на координаты центра инерции частицы (например, в поле тяжести), то

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f + \mathbf{F}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}, \quad (1.54)$$

где  $\mathbf{F} = -\nabla U$  - сила, действующая на частицу со стороны поля.

Учет столкновений нарушает равенство (1.53); функция распределения перестает быть постоянной вдоль фазовых траекторий. Тогда вместо (1.52) запишем

$$\frac{df}{dt} = I_{coll}, \quad (1.55)$$

где символ  $I_{coll}$  означает скорость изменения функции распределения благодаря столкновениям:  $dV d\Gamma \cdot I_{coll}$  есть отнесенное к единице времени изменение за счет столкновений числа частиц в фазовом объеме  $dV d\Gamma$ . Написанное в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mathbf{v}\nabla f + I_{coll}$$

уравнение (1.55) определяет полное изменение функции распределения в заданной точке фазового пространства; член  $dV d\Gamma(\mathbf{v}\nabla f)$  есть убыль (в 1 с) числа частиц в заданном элементе фазового пространства, связанная с их свободным движением.

Величину  $I_{coll}$  называют интегралом столкновений, а уравнения вида (1.55) называют кинетическими уравнениями.

При столкновении двух частиц значения их величин  $\Gamma$  меняются. Поэтому всякое столкновение, испытанное частицей, выводит ее из заданного интервала  $d\Gamma$ ; о таких столкновениях говорят как об актах "ухода". Полное число столкновений с переходами  $\Gamma, \Gamma_1 \rightarrow \Gamma', \Gamma'_1$  со всеми возможными значениями  $\Gamma_1, \Gamma', \Gamma'_1$  при заданном  $\Gamma$ , приходящихся в единицу времени в объеме  $dV$ , равно интегралу

$$dV d\Gamma \int \omega(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1) f f_1 d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1.$$

Происходят и такие столкновения ("приход"), в результате которых частицы, обладавшие первоначально значениями величин  $\Gamma$ , лежащими вне заданного интервала  $d\Gamma$ , попадают в этот интервал. Это - столкновения с переходами  $\Gamma', \Gamma'_1 \rightarrow \Gamma, \Gamma_1$  снова со всеми возможными  $\Gamma_1, \Gamma', \Gamma'_1$  при заданном  $\Gamma$ . Полное число таких столкновений равно

$$dV d\Gamma \int \omega(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma'_1) f' f'_1 d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1.$$

Вычтя число актов ухода из числа актов прихода, найдем, что в результате всех столкновений рассматриваемое число частиц увеличивается в 1 с на

$$dV d\Gamma \int (\omega' f' f'_1 - \omega f f_1) d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1,$$

где  $\omega \equiv \omega(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1)$ ,  $\omega' \equiv \omega(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma'_1)$ .

Таким образом, получаем следующее выражение для интеграла столкновений:

$$I_{coll} = \int (\omega' f' f'_1 - \omega f f_1) d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1. \quad (1.56)$$

Во втором члене в подынтегральном выражении интегрирование по  $d\Gamma' d\Gamma'_1$  относится только к функции  $\omega$ ; множители  $f$  и  $f_1$  от этих переменных не зависят. Поэтому эту часть интеграла можно преобразовать с помощью соотношения унитарности

$$\int \omega(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1) d\Gamma' d\Gamma'_1 = \int \omega(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma'_1) d\Gamma' d\Gamma'_1.$$

В результате интеграл столкновений примет вид

$$I_{coll} = \int \omega' (f' f'_1 - f f_1) d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1, \quad (1.57)$$

в котором оба члена входят с одинаковым коэффициентом  $\omega'$ .

Установив вид интеграла столкновений, мы тем самым получили возможность написать кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f = \int \omega' (f' f'_1 - f f_1) d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1. \quad (1.58)$$

Это интегро-дифференциальное уравнение называют также уравнением Больцмана.

Для одноатомного газа величины  $\Gamma$  сводятся к трем компонентам импульса атома  $\mathbf{p}$ , а согласно принципу детального равновесия

$$\omega(\mathbf{p}', \mathbf{p}'_1; \mathbf{p}, \mathbf{p}_1) = \omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1; \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1)$$

функция  $\omega'$  в интеграле столкновений может быть заменена функцией  $\omega = \omega(\mathbf{p}', \mathbf{p}'_1; \mathbf{p}, \mathbf{p}_1)$ . Выразив затем эту функцию через дифференциальное сечение столкновений  $d\sigma$  согласно  $\omega d^3p' d^3p'_1 = v_{om} d\sigma$  получим

$$I_{coll} = \int v_{om} (f' f'_1 - f f_1) d\sigma d^3p'_1. \quad (1.59)$$

Функция  $\omega$ , а с нею и  $d\sigma = \frac{\omega(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1)}{v_{om}} d\Gamma' d\Gamma'_1$  содержат в себе  $\delta$ -функциональные множители, выражающие законы сохранения импульса и энергии, в силу которых переменные  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1$  в действительности не независимы.

## Кинетическое уравнение Больцмана

### 2.1. Температура закалки и время выхода из равновесия нейтрино

Оценим температуру, при которой нейтрино перестают взаимодействовать между собой и с космической плазмой. Это происходит при температуре порядка нескольких МэВ. В это время электроны и позитроны еще релятивистские, и их концентрация дается формулой (1.51). Барионы при этом уже нерелятивистские и их концентрация подавлена фактором порядка  $\eta_B \sim 6.1 \cdot 10^{-10}$  по отношению к концентрации  $e^+e^-$ -пар. Поэтому с точки зрения закалки нейтрино существенными процессами являются только процессы рассеяния нейтрино на электронах, позитронах и между собой и аннигиляция нейтрино и антинейтрино в  $e^+e^-$ -пару или пару  $\nu\bar{\nu}$  другого типа, а также обратные процессы.

Проведем размерную оценку сечений процессов с участием нейтрино. Нейтрино участвуют только в слабых взаимодействиях. При интересующих нас энергиях сечения пропорциональны квадрату фермиевской константы  $G_F^2$ , где

$$G_F = 1.17 \cdot 10^{-5} GeV^{-2}.$$

Из размерных соображений отсюда получается оценка для сечения любого из указанных выше процессов,

$$\sigma_\nu \sim G_F^2 E^2,$$

где  $E$  - характерная энергия столкновения,  $E \sim T$ .

Время свободного пробега нейтрино дается формулой

$$\tau_\nu = \frac{1}{\langle \sigma_\nu n v \rangle},$$

$v$  - относительная скорость нейтрино и частиц, с которыми происходит столкновение, а  $n$  - плотность этих частиц. В интересующем нас ультрарелятивистском случае плотность числа частиц дается релятивистской формулой (1.51), т.е.  $n \sim T^3$ , а относительная скорость  $v \simeq 1$ . Таким образом, приходим к следующей оценке для времени свободного пробега

$$\tau_\nu \sim \frac{1}{G_F^2 T^5}. \quad (2.1)$$

Сравнивая  $\tau_\nu$  с хаббловским временем

$$H^{-1} = \frac{M_{Pl}^*}{T^2}, \quad (2.2)$$

( $M_{Pl}^* = \sqrt{\frac{90}{8\pi^3 g_*}} M_{Pl} = \frac{M_{Pl}}{1.66\sqrt{g_*}}$ ) видим, что в процессе охлаждения Вселенной  $\tau_\nu$  растет быстрее, чем  $H^{-1}$ . Следовательно, при достаточно высоких температурах время свободного пробега нейтрино было меньше, чем хаббловское время, и нейтрино находилось в термодинамическом равновесии с веществом. Действительно, число столкновений нейтрино, начиная с момента времени  $t$ , оценивается величиной

$$N(t) \sim \int_t^\infty \frac{dt'}{\tau_\nu(t')} = \int_t^\infty \frac{dt'}{t'} \frac{t'}{\tau_\nu(t')} \sim \frac{t}{\tau_\nu(t)} \sim \frac{1}{H(t)\tau_\nu(t)},$$

где учтено, что  $t/\tau_\nu(t) \sim 1/(H(t)\tau_\nu(t))$  быстро падает со временем. Если  $N(t) \gg 1$ , то нейтрино находятся в термодинамическом равновесии, а при  $N(t) \ll 1$  они распространяются как свободные частицы. Таким образом, нейтрино перестают взаимодействовать (“закаливаются”) в приближении

$$\tau_\nu(T) \sim H^{-1}(T).$$

Из (2.1) и (2.2) следует, что это происходит при температуре

$$T_{\nu,f} \sim \left( \frac{1}{G_F^2 M_{Pl}^*} \right)^{1/3} \sim 2 \div 3 \text{ МэВ.}$$

Возраст Вселенной на момент закалки нейтрино составлял

$$t_\nu \sim \frac{1}{2H(T_{\nu,f})} = \frac{M_{Pl}^*}{2T_{\nu,f}^2} \sim 0.00992 \div 0.07533 \text{ с.}$$

Итак, при температуре порядка  $T_{\nu,f}$  нейтрино испытали последнее столкновение и со времени  $t_{\nu,f}$  распространялись во Вселенной свободно. Их полное число (в сопутствующем объеме) при этом не изменялось: реакции аннигиляции  $e^+e^- \rightarrow \bar{\nu}\nu$  и  $\bar{\nu}\nu \rightarrow e^+e^-$  также обусловлены слабыми взаимодействиями и, следовательно, также перестают идти в момент закалки.

## 2.2. Эффективная температура нейтрино

Нейтрино после закалки по-прежнему описываются ультрарелятивистской функцией распределения, характеризующейся эффективной температурой

$$T_\nu = T_{\nu,f} \frac{a(t_\nu)}{a(t_0)}. \quad (2.3)$$

В этот момент температура нейтрино была равна температуре фотонов. Впоследствии температура фотонов также падала за счет расширения Вселенной, сначала по закону (2.3). Однако, в момент закалки нейтрино кроме фотонов в плазме было также большое количество релятивистских электрон-позитронных пар. После того, как Вселенная охладилась до температур ниже массы электрона, электрон-позитронные пары проаннигилировали в фотоны, что привело к ”подогреву“ фотонов относительно нейтрино. Количественно эффект подогрева фотонов за счет аннигиляции электронов и позитронов можно определить, пользуясь законом сохранения энтропии электрон-фотонной компоненты в сопутствующем объеме,

$$g_*(T)a^3T^3 = const, \quad (2.4)$$

где  $g_*(T)$  - эффективное число релятивистских степеней свободы в электрон-фотонной плазме. Сразу после закалки нейтрино в энтропию электрон-фотонной плазмы давали вклад фотоны, электроны и позитроны, что приводит к следующему значению:

$$g_*(T_{\nu,f}) = 2 + \frac{7}{8}(2 + 2) = \frac{11}{2}.$$

После  $e^+e^-$ -аннигиляции в энтропию плазмы вносят вклад только фотоны, и отношение температур фотонов и нейтрино остается постоянным и равным

$$\frac{T_{\gamma,0}}{T_{\nu,0}} = \left( \frac{g_*(T_{\nu,f})}{g_*(T_0)} \right)^{1/3} = \left( \frac{11}{4} \right)^{1/3} \simeq 1.401. \quad (2.5)$$

Следовательно, в настоящее время температура нейтрино равна

$$T_{\nu}(t_0) \simeq 1.95\text{K}. \quad (2.6)$$

### 2.3. Уравнение Больцмана

При высоких температурах первоначальная космическая плазма была близка к тепловому равновесию, т.к. скорость взаимодействия частиц была намного больше скорости расширения Вселенной. Это определяется уравнением Больцмана (гл. 1.5.), которое можно записать как

$$\hat{L}[f] = I_{coll}[f], \quad (2.7)$$

где  $I_{coll}$  - оператор столкновений,  $\hat{L}$  - это оператор Лиувилля,  $f = f(\mathbf{p}, \mathbf{x})$  есть функция распределения частиц в фазовом пространстве. Нерелятивистский оператор Лиувилля в фазовом пространстве имеет вид

$$\hat{L}_{NR} = \frac{d}{dt} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}}, \quad (2.8)$$

где  $m$  - масса частицы и сила  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ . Общий вид ковариантного релятивистского оператора Лиувилля

$$\hat{L} = p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma \frac{\partial}{\partial p^\alpha}, \quad (2.9)$$

где  $\Gamma$  есть символ Кристоффеля. В метрике FRW (гл. 1.2.) пространство однородно и изотропно:  $f = f(|\mathbf{p}|, t) = f(E, t)$ . Тогда оператор Лиувилля для метрики FRW запишем в виде

$$\hat{L}[f(E, t)] = E \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} (|\mathbf{p}|)^2 \frac{\partial f}{\partial E} \quad (2.10)$$

или

$$\hat{L}[f(\mathbf{p}, t)] = E \left( \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right). \quad (2.11)$$

Тогда кинетическое уравнение Больцмана для однородного и изотропного пространства имеет вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - H \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) f = I_{coll}. \quad (2.12)$$

Функция распределения частиц в фазовом пространстве  $f = f(\mathbf{p}, \mathbf{x})$  представляет собой функцию распределения Ферми-Дирака или Бозе-Эйнштейна

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = [\exp(E - \mu)/T \pm 1]^{-1}, \quad (2.13)$$

где  $\mu$  - это химический потенциал частиц. Здесь и далее  $+1$  соответствует статистике Ферми-Дирака и  $-1$  - статистике Бозе-Эйнштейна.

При тепловом равновесии для безмассовых частиц уравнение (2.12) не искривляет расширение Вселенной. Действительно, равновесное распределение:

$$f_{eq} = [\exp(E - \mu(t))/T(t) \pm 1]^{-1}, \quad (2.14)$$

при котором интеграл столкновений  $I_{coll}$  равен нулю,

$$\frac{\dot{T}}{T} + H \frac{p}{E} \frac{\partial E}{\partial p} - \frac{\mu}{E} \left( \frac{\dot{\mu}}{\mu} - \frac{\dot{T}}{T} \right) = 0$$

удовлетворяет уравнению (2.12), если  $p = E$  (т.е.  $m = 0$ ),  $\dot{T}/T = -H$  и  $\mu(t) \sim T(t)$ .

Проверим утверждение, что интеграл столкновений тождественно обращается в нуль при подстановке в качестве  $f$  равновесной функции распределения Ферми

$$f_{eq} = [\exp(E - \mu(t))/T(t) + 1]^{-1}.$$

Заметим, что

$$\frac{f_{eq}}{1 - f_{eq}} = \exp\left(-\frac{E - \mu(t)}{T(t)}\right),$$

отсюда получаем, что в силу закона сохранения энергии имеет место равенство [6]

$$\frac{f_1^{eq} f_2^{eq}}{(1 - f_1^{eq})(1 - f_2^{eq})} = \frac{f_3^{eq} f_4^{eq}}{(1 - f_3^{eq})(1 - f_4^{eq})}. \quad (2.15)$$

Это говорит о том, что для безмассовых частиц, которые первоначально обладают равновесным распределением, температурой и химическим потенциалом, действительно, удовлетворяют этим требованиям для  $I_{coll} = 0$ , так равновесное распределение не исчезает даже, когда взаимодействия "выключаются".

Однако, если частица имеет массу, левая часть уравнения (2.12) не может быть равной нулю для всех возможных значений импульса  $p$  с любыми заданными функциями  $T(t)$  и  $\mu(t)$ .

## 2.4. Основные уравнения

Вместо времени, импульса и температуры, введем следующие безразмерные переменные:

$$x = ma(t), \quad y_j = p_j a(t), \quad z = T_\gamma a(t), \quad (2.16)$$

где  $m$  - это независимый параметр с размерной массой, которую мы принимаем равной 1 МэВ, и масштабный фактор  $a(t)$  нормированный как  $a(t) = 1/T_\nu = 1/T_\gamma$  при высоких температурах. Тогда переменные кинетического уравнения (2.12) можно переписать как:

$$Hx \frac{\partial}{\partial x} f(x, y_i) = I_{coll}. \quad (2.17)$$

Интеграл столкновений для двухчастичного взаимодействия  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  можно записать в виде

$$I_{coll} = \frac{1}{2E_1} \sum_{\text{процессы}} \int \frac{d^3 p_2}{2E_2 (2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{2E_3 (2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{2E_4 (2\pi)^3} \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) F(f_1, f_2, f_3, f_4) S |M_{12 \rightarrow 34}|^2, \quad (2.18)$$

где  $F = f_3 f_4 (1 - f_1)(1 - f_2) - f_1 f_2 (1 - f_3)(1 - f_4)$ ,  $f_3 f_4$  - функции импульсов частиц, входящих в квантовое состояние, и  $f_1 f_2$  - уходящих из него в результате столкновений,  $(1 - f_1) \dots$  - множители, связанные со статистикой Ферми-Дирака, в силу которой столкновения могут привести частицы только в еще не занятые состояния;  $|M_{12 \rightarrow 34}|^2$  есть квадрат амплитуды слабого взаимодействия, просуммированный по спинам всех частиц, кроме первой;  $S$  - фактор симметризации, который равен  $1/2!$  для каждой пары одинаковых частиц в начальном или конечном состоянии и  $2!$  для двух одинаковых частиц в начальном состоянии; суммирование

производиться по всем видам двухчастичных взаимодействий. Фактор симметризации для реакции с  $m$  тождественными частицами в конечном состоянии равен [3]

$$S = \prod_i \frac{1}{m_i!}.$$

Соответствующие реакции представлены в таблице 2.1.

Принимаем, что лептонная симметрия несущественна, так что  $f_\nu = f_{\bar{\nu}}$ . Функция удовлетворяет соответствующему кинетическому уравнению (2.17). Также принимаем, что распределения фотонов и электронов являются равновесными (2.14) с неизвестной температурой  $T_\gamma(x)$  и нулевым химическим потенциалом,  $\mu(x) = 0$ . Третьим необходимым уравнением является закон сохранения энергии (1.40). Запишем его через введенные переменные (2.16):

$$x \frac{d\rho(x)}{dx} = -3(\rho + P), \quad (2.19)$$

где  $\rho(x)$  - полная плотность энергии,  $P$  - давление. Далее, для более удобного вычисления температуры  $T_\gamma$ , введем безразмерные переменные:

$$\bar{\rho} = \rho \left( \frac{x}{m_e} \right)^4, \quad \bar{P} = P \left( \frac{x}{m_e} \right)^4. \quad (2.20)$$

Подставив (2.20) в (2.19), получим:

$$\frac{d}{dx} \bar{\rho}(x) = \frac{1}{x} (\bar{\rho} - 3\bar{P}). \quad (2.21)$$

Из (2.20), используя выражения, которые получены ранее (1.49-1.51),

$$\bar{\rho}_\gamma = \frac{\pi^2}{15} z^4, \quad (2.22)$$

$$\bar{\rho}_e = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty dy y^2 \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\exp(\sqrt{y^2 + x^2/z}) + 1}, \quad (2.23)$$

$$\bar{P}_e = \frac{2}{3\pi^2} \int_0^\infty dy \frac{y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{\exp(\sqrt{y^2 + x^2/z}) + 1}, \quad (2.24)$$

$$\bar{\rho}_\nu = \frac{3}{2\pi^2} \int_0^\infty dy y^3 [f_{\nu_i}(x, y) + f_{\bar{\nu}_i}(x, y)], \quad (2.25)$$

получаем уравнение для эволюции  $z(x)$ ,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{x}{z} F_1(x/z) - \frac{3}{4z^3} \int_0^\infty dy y^3 \left( \frac{df_{\nu_i}}{dx} + \frac{df_{\bar{\nu}_i}}{dx} \right)}{\frac{x^2}{z^2} F_1(x/z) + F_2(x/z) + \frac{2\pi^4}{15}}. \quad (2.26)$$

Где функции  $F_i$  определяются выражениями:

$$F_1(\tau) \equiv \int_0^{\infty} d\omega \omega^2 \frac{\exp(\sqrt{\omega^2 + \tau^2})}{(\exp(\sqrt{\omega^2 + \tau^2}) + 1)^2}, \quad (2.27)$$

$$F_2(\tau) \equiv \int_0^{\infty} d\omega \omega^4 \frac{\exp(\sqrt{\omega^2 + \tau^2})}{(\exp(\sqrt{\omega^2 + \tau^2}) + 1)^2}, \quad (2.28)$$

где  $\tau = x/z$  и  $\omega = y/z$ .

Параметр Хаббла,  $H = \dot{a}/a$ , связан с полной плотность энергии:

$$H^2 = \frac{8\pi\rho}{3M_{Pl}^2},$$

где  $a(t)$  - масштабный фактор и  $M_{Pl} = 1.22 \cdot 10^{19}$  ГэВ - масса Планка.

Интеграл столкновений (2.18) приведен из 9-мерного измерения к 2-мерному (Приложение Б). Для краткости введем некоторые переменные:  $d_1 = D_1$ ,  $d_2(3, 4) = D_2(3, 4)/E_3E_4$  и  $d_3 = D_3/E_1E_2E_3E_4$ . Функции  $D_\alpha$  определены в Приложении Б. Для функций  $D_1$  и  $D_3$  не определяем аргументы, так как они симметричны для всех 4-х аргументов. Из определения этих функций, можем записать связанное кинетическое уравнение для функций распределения массивных нейтрино  $f_{\nu_i}$  в виде:

$$\begin{aligned} Hx\partial_x \sum_{i=1}^3 f_{\nu_i} &= \frac{G_F^2}{2\pi^3 p_1} \int dp_2 p_2 dp_3 p_3 dp_4 p_4 \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \\ &\times \{ [d_1 - d_2(1, 4) - d_2(2, 3)d_3] [4 \sum_{i=1}^3 F[f_{\nu_i}, f_{\bar{\nu}_i}, f_{\nu_i}, f_{\bar{\nu}_i}] + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 F[f_{\nu_i}, f_{\bar{\nu}_j}, f_{\nu_i}, f_{\bar{\nu}_j}]] \\ &+ [d_1 + d_2(1, 2) + d_2(3, 4) + d_3] [2 \sum_{i=1}^3 F[f_{\nu_i}, f_{\nu_i}, f_{\nu_i}, f_{\nu_i}] + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 F[f_{\nu_i}, f_{\nu_j}, f_{\nu_i}, f_{\nu_j}]] \\ &+ 4 \sum_{i=1}^3 F[f_{\nu_i}, f_{\bar{\nu}_i}, f_{e^+}, f_{e^-}] \\ &\times (g_L g_R \frac{m_e^2}{E_3 E_4} (d_1 + d_2(1, 2)) + g_L^2 (d_1 - d_2(1, 4) - d_2(2, 3) + d_3) + g_R^2 (d_1 - d_2(1, 3) - d_2(2, 4) + d_3)) \\ &+ 4 \sum_{i=1}^3 F[f_{\nu_i}, f_{e^\mp}, f_{\nu_i}, f_{e^\mp}] \\ &\times ((2d_1 + d_2(1, 2) + d_2(3, 4) - d_2(1, 4) - d_2(2, 3) + 2d_3) \sum_{i=1}^3 ((g_L^{ij})^2 + (g_R^{ij})^2) - \frac{2m_e^2}{E_2 E_4} (d_1 - d_2(1, 3)) \sum_{i=1}^3 g_L^{ij} g_R^{ij} \}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Где  $g_L = -1 + 2 \sin^2 \theta_W$  и  $g_R = 2 \sin^2 \theta_W$ ,  $g_L^{ij} = V_{ei} V_{ej}^* + \delta_{ij}(-1 + 2 \sin^2 \theta_W)$  и  $g_R^{ij} = 2 \delta_{ij} \sin^2 \theta_W$ ,  $f_e = [\exp(E/T_\gamma) + 1]^{-1}$  и температура  $T_\gamma$ , определенная из уравнения (2.19).

Таким образом, мы имеем полную систему из четырех уравнений для четырех неизвестных функций  $T_\gamma(x)$ ,  $f_{\nu_1}(x, y)$ ,  $f_{\nu_2}(x, y)$  и  $f_{\nu_3}(x, y)$ .

## 2.5. Вычисление $|M|^2$ для флейворных и массивных нейтрино

### Вычисление $|M|^2$ для флейворных нейтрино

Запишем лагранжиан слабого взаимодействия лептонов и флейворных нейтрино:

$$L_{weak} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_n (\bar{l}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) W_\mu \nu_n + \text{э.с.}) - \frac{g}{2 \cos \theta_W} \sum_\psi (\bar{\psi} \gamma^\mu (g_V^\psi - g_A^\psi \gamma^5) \psi Z_\mu). \quad (2.30)$$

Суммирование по  $\psi$  означает суммирование по всем лептонам; постоянные  $g_V^\psi = t_3^\psi - 2q_\psi \sin^2 \theta_w$  и  $g_A^\psi = t_3^\psi$ , где  $t_3^\psi$  - третья компонента изоспина, равная  $+1/2$  для нейтрино и  $-1/2$  для заряженных лептонов,  $q_\psi$  - заряд. Первое слагаемое в  $L_{weak}$  описывает взаимодействия лептонов и флейворных нейтрино с  $W$ -бозонами, а второе - с  $Z$ -бозонами.

Рассмотрим процесс упругого рассеяния электронного нейтрино на электроне  $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$ . Рассеяние происходит за счет обмена  $Z$ -бозонами (нейтральные токи) и обмена  $W$ -бозонами (заряженные токи). Матричные элементы процесса имеют вид ( $CC$  - заряженный ток,  $NC$  -



Рис. 2.1. Упругое рассеяние электронного нейтрино на электроне, обусловленное нейтральными и заряженными токами.

нейтральный ток)

$$M^{CC} = \left( \frac{g}{2\sqrt{2}} \right)^2 \bar{e}(p_4) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e(p_1) \bar{\nu}_e(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e(p_2) \quad (2.31)$$

и

$$M^{NC} = - \left( \frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 \bar{\nu}_i(p_3) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_i(p_1) \bar{e}(p_4) \gamma^\mu [g_V^e - g_A^e \gamma_5] e(p_2). \quad (2.32)$$

Применив преобразование Фирца к уравнению (2.31)

$$\bar{e}(p_4) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e(p_1) \bar{\nu}_e(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e(p_2) = -\bar{e}(p_4) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e(p_2) \bar{\nu}_e(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e(p_1),$$

сложим амплитуды двух токов. В процессе  $\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$  происходит интерференция заряженных и нейтральных токов (рис. 2.1). Диаграммы, отличающиеся друг от друга перестановкой двух внешних тождественных фермионов, имеют противоположный знак. Появление дополнительного знака, может быть обосновано следующим образом. Волновые функции частиц являются операторами. Поэтому при спаривании их операторами рождения и уничтожения частиц надо учитывать число ферми-перестановок. Поскольку порядок следования операторов  $M^{NC}$  и  $M^{CC}$  отличается только перестановкой волновых функций, то и соответствующие вклады будут иметь противоположный знак. Итак, амплитуда процесса имеет вид:

$$M = -\bar{e}(p_4) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e(p_2) \bar{\nu}_e(p_3) \gamma^\mu \times \left[ \left( \frac{g}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 g_V^e - \left( \left( \frac{g}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 g_A^e \right) \gamma_5 \right] \nu_e(p_1). \quad (2.33)$$

Введем постоянную Ферми

$$\frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}, \quad \left( \frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 \frac{1}{m_Z^2} = \frac{G_F}{2\sqrt{2}},$$

где ( $m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta_W}$ ), а константы  $g_V^e$  и  $g_A^e$  равны

$$g_V^e = -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W, \quad g_A^e = -\frac{1}{2}.$$

Уравнение (2.33) переписется следующим образом:

$$M = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{e}(p_4) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e(p_2) \bar{\nu}_e(p_3) \gamma^\mu [g_V^e - g_A^e \gamma_5] \nu_e(p_1). \quad (2.34)$$

Перепишем  $g_V^e$  и  $g_A^e$  через константы  $g_L$  и  $g_R$ :

$$g_L = \frac{g_V^e + g_A^e}{2} = -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W,$$

$$g_R = \frac{g_V^e - g_A^e}{2} = \sin^2 \theta_W.$$

Тогда квадрат амплитуды процесса будет иметь вид:

$$|M_{\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-}|^2 = MM^+ = \frac{G_F^2}{2} Tr[\hat{p}_3 \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \hat{p}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma_5)]$$

$$\begin{aligned}
& \times Tr[(\hat{p}_4 - m_e)\gamma_\mu(g_L(1 - \gamma_5) + g_R(1 + \gamma_5))(\hat{p}_2 - m_e)\gamma_\nu(g_L(1 - \gamma_5) + g_R(1 + \gamma_5))] \\
& = 2^7 G_F^2 (g_L^2(p_1 p_4)(p_2 p_3) + g_R^2(p_1 p_2)(p_3 p_4) - g_L g_R m_e^2(p_1 p_3)). \tag{2.35}
\end{aligned}$$

### Вычисление $|M|^2$ для массивных нейтрино

Лагранжиан слабого взаимодействия лептонов и массивных нейтрино имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
L_{weak} = & -\frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_{\alpha,j} (V_{\alpha j}^* \bar{l}_\alpha \gamma^\mu (1 - \gamma^5) W_\mu \nu_j + \text{э.с.}) \\
& - \frac{g}{2 \cos \theta_W} \sum_{\psi} (\bar{\psi} \gamma^\mu (g_V^\psi - g_A^\psi \gamma^5) \psi Z_\mu). \tag{2.36}
\end{aligned}$$

Суммирование по  $\psi$  означает суммирование по всем лептонам; постоянные  $g_V^\psi = t_3^\psi - 2q_\psi \sin^2 \theta_w$  и  $g_A^\psi = t_3^\psi$ , где  $t_3^\psi$  - третья компонента изоспина, равная  $+1/2$  для нейтрино и  $-1/2$  для заряженных лептонов,  $q_\psi$  - заряд;  $V_{\alpha j}^*$  - матрица смешивания. Первое слагаемое в  $L_{weak}$  описывает взаимодействия лептонов и массивных нейтрино с  $W$ -бозонами, а второе - с  $Z$ -бозонами.

Вычисление амплитуды для процессов, в которых участвуют массивные нейтрино аналогично вычислению процессов с флейворными нейтрино, но добавляются матрицы смешивания. Переход от калибровочного базиса  $|\nu_\alpha\rangle$ ,  $\alpha = e, \mu, \tau$  к массовому базису  $|\nu_i\rangle$ ,  $i = 1, 2, 3$  осуществ-



Рис. 2.2. Упругое рассеяние массивного нейтрино на электроне, обусловленное нейтральными и заряженными токами.

ляет унитарное преобразование  $V_{i\alpha}$  (матрица смешивания в лептонном секторе):

$$|\nu_i\rangle = V_{i\alpha} |\nu_\alpha\rangle.$$

Электронным, мюонным и  $\tau$ -нейтрино служат линейные комбинации состояний с определенной массой  $|\nu_\alpha\rangle = V_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle$ , рождающиеся вместе с заряженными антилептонами (позитроном,  $\mu^+$  и  $\tau^+$ , соответственно) в двухчастичных распадах  $W^+$ -бозонов. Тогда матричные элементы

для заряженного и нейтрального токов (рис. 2.2) для процесса  $\nu_i e^- \rightarrow \nu_i e^-$  имеют вид

$$M^{CC} = \left( \frac{g}{2\sqrt{2}} \right)^2 V_{ei}^* V_{ej}^* \bar{e}(p_4) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_i(p_1) \bar{\nu}_j(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e(p_2)$$

и

$$M^{NC} = -\delta_{ij} \left( \frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 \bar{\nu}_i(p_3) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_i(p_1) \bar{e}(p_4) \gamma^\mu [g_V^e - g_A^e \gamma_5] e(p_2).$$

Проделав преобразования аналогичные приведенным для флейворных нейтрино, запишем квадрат амплитуды для процесса  $\nu_i e^- \rightarrow \nu_i e^-$ :

$$\begin{aligned} |M|^2 &= MM^+ = \frac{G_F^2}{2} Tr[\hat{p}_3 \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \hat{p}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma_5)] \\ &\times Tr[(\hat{p}_4 - m_e) \gamma_\mu (\tilde{g}_L^{ij} (1 - \gamma_5) + \tilde{g}_R^{ij} (1 + \gamma_5)) (\hat{p}_2 - m_e) \gamma_\nu (\tilde{g}_L^{ij} (1 - \gamma_5) + \tilde{g}_R^{ij} (1 + \gamma_5))] \\ &= 2^7 G_F^2 ((\tilde{g}_L^{ij})^2 (p_1 p_4) (p_2 p_3) + (\tilde{g}_R^{ij})^2 (p_1 p_2) (p_3 p_4) - \tilde{g}_L^{ij} \tilde{g}_R^{ij} m_e^2 (p_1 p_3)), \end{aligned} \quad (2.37)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{g}_L^{ij} &= \frac{g'_V + g'_A}{2} = V_{ei} V_{ej}^* + \delta_{ij} (2 \sin^2 \theta_W - 1), \\ \tilde{g}_R^{ij} &= \frac{g'_V - g'_A}{2} = 2 \delta_{ij} \sin^2 \theta_W, \end{aligned}$$

где  $g'_V = V_{ei} V_{ej}^* + \delta_{ij} (4 \sin^2 \theta_W - 1)$ ,  $g'_A = V_{ei} V_{ej}^* - \delta_{ij}$ .

Вычисленные квадраты амплитуд для всех процессов с массивными нейтрино представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1. Матричные элементы для процессов с массивными нейтрино

Процесс	$2^{-5}G_F^{-2}S M_{12 \rightarrow 34} ^2$
$\nu_i + \bar{\nu}_i \rightarrow \nu_i + \bar{\nu}_i$	$4(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)$
$\nu_i + \bar{\nu}_i \rightarrow \nu_j + \bar{\nu}_j$	$(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)$
$\nu_i + \bar{\nu}_j \rightarrow \nu_i + \bar{\nu}_j$	$(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)$
$\nu_i + \nu_i \rightarrow \nu_i + \nu_i$	$2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4)$
$\nu_i + \nu_j \rightarrow \nu_i + \nu_j$	$(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4)$
$\nu_i + \bar{\nu}_i \rightarrow e^+ + e^-$	$4(g_L^2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + g_R^2(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + g_L g_R m_e^2(p_1 \cdot p_2))$
$\nu_i + e^- \rightarrow \nu_j + e^-$	$4[(g_L^{ij})^2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (g_R^{ij})^2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - g_L^{ij} g_R^{ij} m_e^2(p_1 \cdot p_3)]$
$\nu_i + e^+ \rightarrow \nu_j + e^+$	$4[(g_R^{ij})^2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (g_L^{ij})^2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - g_L^{ij} g_R^{ij} m_e^2(p_1 \cdot p_3)]$

## Глава 3

### Результаты

В результате всех проделанных вычислений, имеем полную систему из четырех уравнений для четырех неизвестных функций  $T_\gamma(x)$ ,  $f_{\nu_1}(x, y)$ ,  $f_{\nu_2}(x, y)$  и  $f_{\nu_3}(x, y)$ . Решение будем искать двумя различными, но эквивалентными способами. Первый способ, система решается точно, т.е. для полной функции распределения  $f_{\nu_j}(x, y)$ , и, второй, для малой поправки  $|\delta_j| < 1$  к равновесию  $f_{\nu_j}(x, y) = f_{\nu_j}^{eq}(y)(1 + \delta_j(x, y))$ , где  $f_{\nu_j}^{eq} = [\exp(E/T_\nu) + 1]^{-1}$  с  $T_\nu = 1/a$ . В последнем случае, вклад в интеграл столкновений для всех процессов ничтожно мал для  $\delta$ , за исключением взаимодействия нейтрино с электронами, где главный член пропорционален разности между температурами  $\nu$  и  $e^\pm$ , которые дают ненулевой вклад. Кроме того, для  $x < 1$  этот вклад также очень мал, потому что разность температур порядка  $T_\gamma/T_\nu \approx 1 + 0.005x^{2.3}$ , которая близка к 1 при малых  $x$ , где  $T_\nu = 1/a$ .

Оба способа прекрасно согласуются, но при вычислении полной функции распределения необходимо учитывать фактор 1.22 (из  $M_{Pl}$ ) для некоторых процессов.

#### Начальные условия

Выберем начальные условия для  $x$ . Для системы кинетических уравнений выбираем три значения  $x_{in} = 0.1, 0.2$  и  $0.5$ . Результаты с  $x_{in} = 0.1$  и  $x_{in} = 0.2$  близки с точностью  $10^{-5}$ . Это означает, что для  $x \leq 0.2$  можно пренебречь изменением функции распределения нейтрино.

Для  $x_{in} = 0.1$  безразмерная температура фотонов отличается от единицы,  $aT \neq 1$ . Для вычисления берем два возможных начальных условия. Первое условие:

$$f_{\nu_e} = f_{eq} = \frac{1}{\exp^{y/T} + 1}, \quad aT(x_{in} = 0.1) = 1.00006. \quad (3.1)$$

Эти условия соответствуют сохранению энергии в электромагнитной плазме до времени  $x_{in}$ . Точность для равновесной температуры порядка 0.00003. Второе начальное условие схоже с первым:

$$f_{\nu_e} = f_{eq} = \frac{1}{\exp^{y/T} + 1}, \quad aT(x_{in} = 0.1) = 1.00003. \quad (3.2)$$

Эти условия соответствуют моменту, когда нейтрино находится в тепловом равновесии с электромагнитной плазмой до  $x_{in}$ . Для обоих начальных условий результаты для плотности энергии нейтрино и других величин одинаковы для  $x_{in} = 0.1$ . Если выбрать  $x_{in} = 0.2$ , тогда второе условие дает более точные результаты.

## Интервалы по импульсу

По импульсу выбираем безразмерный интервал  $0 \leq y \leq 20$ . Для нейтрино, находящихся в равновесии,  $\rho_\nu(y > 20)/\rho_\nu \approx 3 \cdot 10^{-6}$ , т.к. неравновесное отклонение от плотности энергии нейтрино составляет порядка 1%. Несколько большее отклонение в скорости процесса возникает из-за фактора, стоящего перед экспонентой,  $\sim p^2$ , но даже для импульса  $y = 20$  это достаточно хорошая точность.

Для того чтобы выбрать сетку распределения импульса правильно, посмотрим на дифференциальную плотность энергии нейтрино  $d\rho_\nu/dy = (1/\pi^2)y^3 f(y)$  (2.25). 97.5% плотности энергии содержат частицы с импульсами в интервале от  $1 < y < 10$ . Частицы с импульсами  $0.1 < y < 1$  дают 1.4% от полной плотности энергии и частицы с  $10 < y < 20$  дают вклад 1.1%. Также необходимо учитывать неравновесные отклонения для частиц с большими импульсами.

Приведенные выше аргументы, предполагают использование линейного распределения в области  $0 < y < 20$  или логарифмического распределения в  $0.1 < y < 20$ . Разница между этими подходами с одинаковым числом точек в сетке составляет около  $10^{-6}$  для плотности энергии нейтрино.

Наиболее эффективным является логарифмическое распределение, но если выбрать это распределение точек в сетке  $10^{-5.5} < y < 10^{1.7}$  с 40 точками для каждой декады, то больше, чем половина точек ляжет в области  $y < 0.1$ , которая дает вклад только 0.0002% в плотность энергии нейтрино. В наиболее важной декаде  $1 < y < 10$ , получаем только 40 значений.

Для того чтобы проверить ошибки, связанные с конечным числом точек в сетке, выбираем 100, 200 и 400 точек в сетке. Результаты представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1. Вычисление двух величин:  $f(x, y)$  и  $\delta(x, y)$ . Таблица взята из [12].

Вычисление	точки	$aT_\gamma^{eq}$	$\delta(aT_\gamma^{eq})$	$\delta\rho_{\nu_e}/\rho_{\nu_e}$	$\delta\rho_{\nu_\mu}/\rho_{\nu_\mu}$
$\delta(x, y)$	100	1.399130	0.000031	0.9435%	0.3948%
	200	1.399135	0.000031	0.9458%	0.3971%
	400	1.399135	0.000031	0.9459%	0.3972%
$f(x, y)$	100	1.399079	-0.000024	0.9452%	0.3978%
	200	1.399077	-0.000023	0.9459%	0.3986%
	400	1.399077	-0.000023	0.9461%	0.3990%

## Методы вычисления

Используем три основных метода вычисления неизвестной функции распределения  $f(x, y)$  или малой поправки  $\delta(x, y)$ .

1) Метод Эйлера. Ошибки, связанные с конечным числом точек в  $x$ , решаются следующим образом. Во-первых, запускается программа с некоторым фиксированным числом точек  $x$ , распределенных в интервале  $x_{in} < x < x_f$ , таким образом, что функции распределения значительно не меняются в любой точке значения импульса  $y$  в течение одной итерации  $dx$ . Затем запускается программа для закона сохранения энтропии (т.е. с нейтрино, находящимися в термодинамическом равновесии) с такими же значениями  $x_i$  как и в первом запуске. В конце сравниваем асимптотическое значение отношения температур с теоретическим значением, которое равно  $T_\gamma/T_\nu = (11/4)^{1/3} = 1.40102$ . Для хорошей точности, требуем, чтобы ошибка в этом отношении температур не превышала значения 0.00003 (четвертая колонка в табл. 3.1).

2) Метод Булирша-Штера. Достоинство этого метода заключается в том, что для достижения высокой точности не требуется многократных перевычислений правых частей решаемой системы дифференциальных уравнений. Метод позволяет одновременно варьировать порядок, величину основного шага и число этпов на каждом шаге. Поэтому одинаковой точности можно достичь либо увеличивая порядок метод, либо увеличивая число этапов вычислений на каждом шаге, либо уменьшая величину шага интегрирования. Поскольку с увеличением порядка экстраполяции возрастает влияние погрешностей округления, точность метода не превышает  $10^{-6}$ .

3) Метод жестких уравнений. Искомое решение дифференциальных задач медленно изменяется, и тем не менее для получения результата расчет приходится вести мелким шагом. Попытки увеличить шаг сетки приводят к большому росту погрешности решения. Для решения таких систем применяется метод жестких уравнений.

После проделанных вычислений получаем, что наиболее точным методом (в вычислении  $T_\gamma^{eq}$ ) является метод Булирша-Штера, но в области малых значений  $x_{in} < x < 1$  ему требуется процессорного времени в 10 раз больше, чем методам Эйлера или жестких уравнений. Кроме того, при  $x_{in} \ll 0.1$  только третий метод использует малое число шагов по времени.

В области больших значений  $x > 1$ , ситуация обратная. Метод Булирша-Штера требует в 10 раз меньше шагов по времени, чем метод Эйлера. Точность метода жестких уравнений в этой области нельзя считать, т.к. закон сохранения энергии, который используется для оценки температуры фотонов, не является жестким уравнением. При вычислении третьим

методом, изменение температуры фотонов запишем как  $T_\gamma = T_\gamma^{eq} + \delta T$ . Значение равновесной температуры фотонов  $T_\gamma^{eq}$  получаем из уравнения сохранения энтропии, в то время как для оценки изменения малого  $\delta T$  используется такой же шаг по времени как и при вычислении кинетических уравнений жестким методом.

При вычислении малой поправки,  $\delta(x, y)$ , к функции распределения, используется метод Эйлера. При вычислении полной функции распределения,  $f(x, y)$ , используется метод Эйлера для  $x < 1$  и метод Булирша-Штера для  $x > 1$ . В таблице 3.2 представлены результаты для всех методов вычисления с 100 точками по сетке  $y$ .

Таблица 3.2. Различные методы вычисления  $f(x, y)$  и  $\delta(x, y)$ . Таблица взята из [12].

Вычисление	точки	$aT_\gamma^{eq}$	$\delta(aT_\gamma^{eq})$	$\delta\rho_{\nu_e}/\rho_{\nu_e}$	$\delta\rho_{\nu_\mu}/\rho_{\nu_\mu}$
$\delta(x, y)$ Euler	100	1.399130	0.000031	0.9435%	0.3948%
$f(x, y)$ Euler+BS	100	1.399079	-0.000024	0.9452%	0.3978%
$f(x, y)$ BS	100	1.399100	$10^{-7}$	0.9463%	0.3981%
$f(x, y)$ stiff	100	1.399060		0.9418%	0.3976%
$f(x, y)$ stiff+BS	100	1.399085		0.9399%	0.3934%

### Функция распределения плотности числа нейтрино

Из сделанных ранее вычислений, знаем температуру закалки и время выхода из равновесия нейтрино (гл. 2.1). Так как нейтрино при выходе из равновесия были ультрарелятивистскими, то плотность числа частиц составляла (1.51). Но это в том случае, когда нейтрино являются флейворными. Для массивных нейтрино плотность числа частиц имеет вид

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int \frac{p^2}{\exp\sqrt{m_i^2+p^2}/T + 1} dp, \quad (3.3)$$

где  $m_i$  - масса одного из видов нейтрино,  $g_i$  для нейтрино равно 1.

Функция распределения нейтрино в расширяющейся Вселенной целиком определяется тем, как "краснеют" импульсы:

$$f(\mathbf{p}, t) = f(a(t)\mathbf{k}),$$

где  $\mathbf{k}$  - координаты импульса нейтрино. Если в какой-то момент времени функция распределения известна и равна  $f_i(\mathbf{p})$ , то в последующие времена она равна

$$f(\mathbf{p}, t) = f_i\left(\frac{a(t)}{a_i}\mathbf{p}\right). \quad (3.4)$$

Для безмассовых нейтрино, функция распределения - планковская, и зависит только от отношения импульса и температуры,  $\frac{|\mathbf{p}|}{T_i}$ :

$$f_i(\mathbf{p}) = f_{Pl}\left(\frac{|\mathbf{p}|}{T_i}\right) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{|\mathbf{p}|/T_i} + 1}, \quad (3.5)$$

как и имеем в (1.51). В последующие времена, согласно (3.4), функция распределения равна

$$f(\mathbf{p}, t) = f_{Pl}\left(\frac{a(t)|\mathbf{p}|}{a_i T_i}\right) = f_{Pl}\left(\frac{|\mathbf{p}|}{T_{eff}(t)}\right),$$

где

$$T_{eff}(t) = \frac{a_i}{a(t)} T_i. \quad (3.6)$$

$T_{eff}(t)$  - температура нейтрино в настоящее время, равная 1.95 К (2.6),  $T_i$  - температура в момент выхода нейтрино из термодинамического равновесия и равная  $2 \div 3$  МэВ (гл. 2.1.).

Тогда плотность числа флейворных нейтрино в расширяющейся Вселенной

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int \frac{p^2}{e^{p\chi/T_i} + 1} dp, \quad (3.7)$$

где  $\chi = a_i/a(t)$ . Плотность числа массивных нейтрино (3.3) переписать следующим образом:

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int \frac{p^2}{e^{\sqrt{m_i^2 + p^2}\chi/T_i} + 1} dp. \quad (3.8)$$

Введем безразмерные переменные:

$$x = \frac{p\chi}{T_i}, \quad y = \frac{m_i}{T_i}. \quad (3.9)$$

Тогда уравнения (3.7) и (3.8) запишутся в виде

$$n_i = \frac{g_i T_i^3}{2\pi^2} \int \frac{x^2}{e^x + 1} dx, \quad (3.10)$$

$$n_i = \frac{g_i T_i^3}{2\pi^2} \int \frac{x^2}{e^{\sqrt{y^2 + x^2}} + 1} dx. \quad (3.11)$$

Из ограничений, полученных на массу нейтрино,  $0.04 \text{ эВ} < m_{\nu_H} < 1 - 2 \text{ эВ}$ , выбираем значение  $m_3 = 0.05 \text{ эВ}$ . Тогда массу других двух нейтрино найдем из нейтринных осцилляций, подтвержденных экспериментально:

$$\Delta m_{12}^2 = (7.65_{-0.20}^{+0.23}) \cdot 10^{-5} \text{эВ}^2 \quad (3.12)$$

и

$$|\Delta m_{13}^2| = (2.40_{-0.11}^{+0.12}) \cdot 10^{-3} \text{эВ}^2. \quad (3.13)$$

Получаем, что массы нейтрино, назовем их  $m_2$  и  $m_1$ , равны  $3.903 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}$  и  $2.83 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}$ , соответственно.

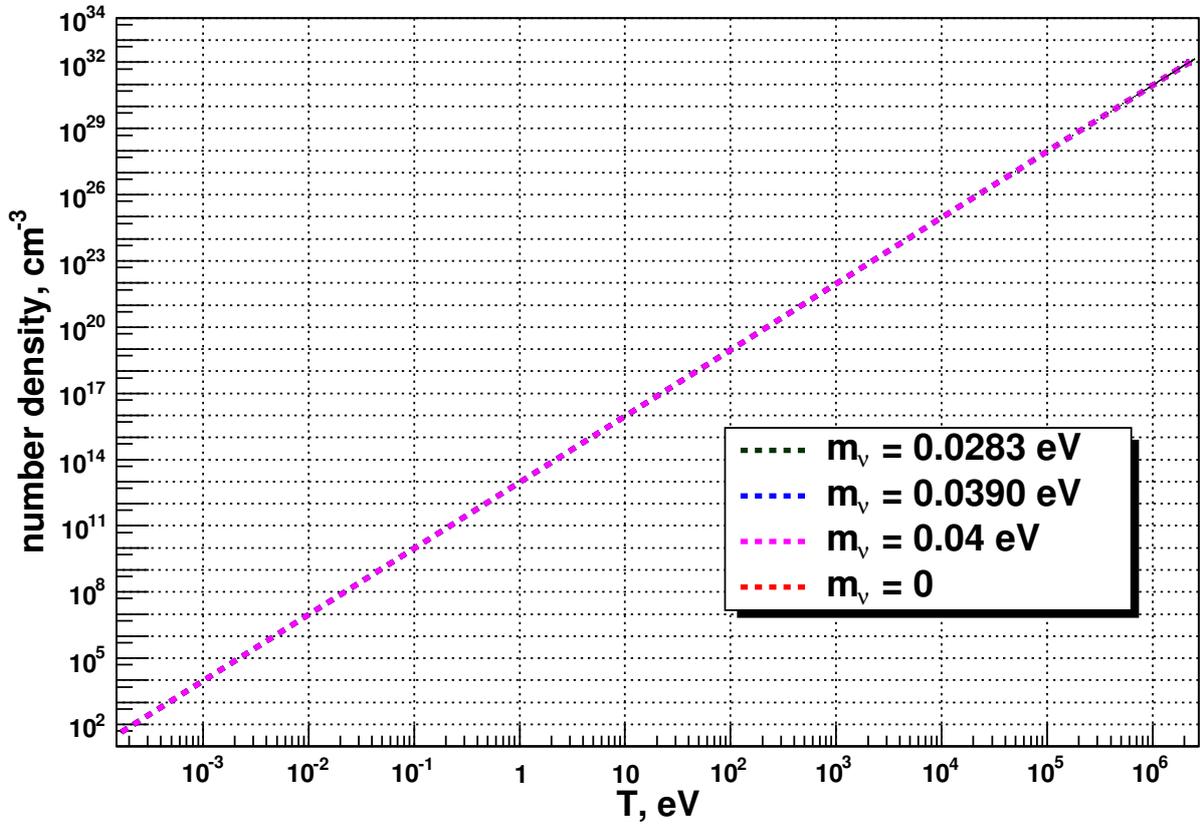


Рис. 3.1. Функции распределения плотности числа нейтрино.

С помощью среды программирования ROOT, сравним графики функций распределения плотности числа нейтрино, для флейворного и массивного случаев, с изменением (рис. 3.1). Из графика явно видно, что функции распределения плотности массивных и флейворных нейтрино совпадают, что и следовало ожидать. Так как отношение массы нейтрино к температуре закалки порядка  $10^{-8}$ , что не влияет на функцию распределения.

## Заключение

- В данной работе, рассмотрено численное решение уравнения Больцмана для функций распределения нейтрино, которые зависят от импульсного отклонения в равновесном спектре нейтрино. Также найдено значение отношения температур нейтрино и фотонов, которое немного меньше, чем в стандартном случае, благодаря малой передачи энергии от электромагнитной плазмы к нейтрино в процессах  $e^+e^- \rightarrow \nu\bar{\nu}$ .
- Было показано, что эффект неравновесных нейтрино может быть посчитан с очень хорошей точностью, если взять достаточно большое число точек по импульсу в области  $1 < y < 10$  и точный метод для эволюции по времени. Температура фотонов:  $(aT_\gamma)_{final} = 1.39910 \pm 0.00003$ , изменение плотности энергии электронных нейтрино:  $\delta\rho_{\nu_e}/\rho_{\nu_e} = 0.946 \pm 0.001$ , изменение плотности энергии мюонных нейтрино:  $\delta\rho_{\nu_\mu}/\rho_{\nu_\mu} = 0.398 \pm 0.001$ . Результаты, полученные разными способами, прекрасно согласуются друг с другом.
- Построен график зависимости функций распределения плотности числа нейтрино для флейворного и массивного случаев с изменением температуры. Из графика видно, что в обоих случаях функции распределения плотности числа нейтрино совпадают. Так как отношение массы нейтрино к температуре закалке порядка  $10^{-8}$ , что не влияет на функцию распределения.

## Литература

- [1] S. Esposito, G. Miele, S. Pastor, M. Peloso and O. Pisanti, Nucl. Phys. B **590** (2000) 539 [arXiv:astro-ph/0005573].
- [2] Д.С. Горбунов, В.А. Рубаков. Введение в теорию ранней Вселенной. М.: 2006, 465 с.
- [3] Дж.Д. Бьеркен, С.Д. Дрелл. Релятивистская квантовая теория. т.1. М.: 297 с.
- [4] J. Lesgourgues, S. Pastor, [arXiv:astro-ph/0603494v2].
- [5] A. D. Dolgov, S. H. Hansen and D. V. Semikoz, Nucl. Phys. B **503**, 426 (1997) [arXiv:hep-ph/9703315].
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Физическая кинетика. 10 т. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 536 с.
- [7] Наумов Д.В. Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов. Электрослабая модель в примерах/ Д.В. Наумов. - в печати
- [8] S. Hannestad and J. Madsen, Phys. Rev. D **52** (1995) 1764 [arXiv:astro-ph/9506015].
- [9] N. Y. Gnedin and O. Y. Gnedin, Astrophys. J. **509** (1998) 11 [arXiv:astro-ph/9712199].
- [10] A. D. Dolgov and M. Fukugita, JETP Lett. **56** (1992) 123 [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **56** (1992) 129].
- [11] S. Dodelson and M. S. Turner, Phys. Rev. D **46** (1992) 3372.
- [12] A. D. Dolgov, S. H. Hansen and D. V. Semikoz, Nucl. Phys. B **543** (1999) 269 [arXiv:hep-ph/9805467].

## Литература

## Приложение А

### Формулы для вычисления определенных интегралов

(1). Для целых положительных  $n$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^x - 1} dx = \frac{(2\pi)^{2n}}{4n} B_n,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^x + 1} dx = \frac{2^{2n-1} - 1}{2n} \pi^{2n} B_n,$$

где  $B_n$  - числа Бернулли,

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \dots$$

(2). При произвольных  $y$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{y-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(y)\zeta(y),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{y-1}}{e^x + 1} dx = (1 - 2^{1-y})\Gamma(y)\zeta(y),$$

где  $\zeta(y)$  - дзета-функция Римана, частные значения которой равны

$$\zeta(3) = 1.202, \quad \zeta(5) = 1.037, \quad \zeta(3/2) = 2.612, \quad \zeta(5/2) = 1.341.$$

Для целых положительных  $n$  справедливо

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

Значения гамма-функции при любых полуцелых  $y$  можно найти, исходя из значения

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

и воспользовавшись свойством  $\Gamma(1 + y) = y\Gamma(y)$ .

## Приложение Б

### Вычисление интеграла столкновений

Проведем аналитическое вычисление интеграла столкновений. В интересующем нас случае, т.е. вершина четырехчастичного взаимодействия и изотропная одночастичная функция распределения, семь из девяти интегралов можно посчитать и только два интеграла от импульсов входящих частиц вычисляются количественно. Начнем с общей формулы интеграла столкновений для случая однородного пространства:

$$I_{coll} = \frac{1}{2E_1} \int (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_i) |M_{fi}(|\mathbf{p}|)^2 F(f) \prod \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}, \quad (\text{Б.1})$$

где энергия частицы есть  $E_i = \sqrt{m_i^2 + \mathbf{p}_i^2}$  и  $F(f)$  определяется как:

$$F(f) = (1 - f_1)(1 - f_2)f_3f_4 - (1 - f_3)(1 - f_4)f_1f_2, \quad (\text{Б.2})$$

где функция распределения  $f_j$  зависит только от модуля импульса частицы и времени  $f_j(|\mathbf{p}|, t)$ .

Используем тождество:

$$\delta^3(\sum \mathbf{p}_i) = \int e^{i(\lambda, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4)} \frac{d^3 \lambda}{(2\pi)^3} \quad (\text{Б.3})$$

и явно выделяем интегрирование по углу:

$$d^3 p_i = d\phi_i d \cos \theta_i p_i^2 dp_i \equiv p_i^2 dp_i d\Omega_i. \quad (\text{Б.4})$$

Тогда интеграл столкновений в (Б.1) будет иметь вид:

$$I_{coll} = \frac{1}{64\pi^3 E_1 p_1} \int \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) F(f) |M_{fi}(|\mathbf{p}|)^2 \times D(p_1, p_2, p_3, p_4) \frac{p_2 dp_2}{E_2} \frac{p_3 dp_3}{E_3} \frac{p_4 dp_4}{E_4}. \quad (\text{Б.5})$$

Где  $D(p_1, p_2, p_3, p_4)$  определяем как:

$$D(p_1, p_2, p_3, p_4) \equiv \frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{64\pi^5} \int_0^\infty \lambda^2 d\lambda \int e^{i(\mathbf{p}_1, \lambda)} d\Omega_\lambda \times \int e^{i(\mathbf{p}_2, \lambda)} d\Omega_2 \int e^{i(\mathbf{p}_3, \lambda)} d\Omega_3 \int e^{i(\mathbf{p}_4, \lambda)} d\Omega_4. \quad (\text{Б.6})$$

В 4-фермионном приближении квадраты матричных элементов содержат два вида слагаемых:

$$K_1(q_{1\mu} q_2^\mu)(q_{3\mu} q_4^\mu) = K_1(E_1 E_2 - \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2)(E_3 E_4 - \mathbf{q}_3 \mathbf{q}_4) \quad (\text{Б.7})$$

и

$$K_2 m^2(q_{3\mu} q_4^\mu) = K_2 m^2(E_3 E_4 - \mathbf{q}_3 \mathbf{q}_4), \quad (\text{Б.8})$$

где каждому  $q_i$  соответствует некоторое  $p_i$ . Для того чтобы вычислить угловой интеграл, определим угол между  $\mathbf{q}_i$  через углы из уравнения (Б.4):

$$(\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2) = q_1 q_2 \cos \phi_{12} = q_1 q_2 (\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2). \quad (\text{Б.9})$$

Первый член в уравнении (Б.9) исчезает, при интегрировании по углам  $\varphi_1$  или  $\varphi_2$  за полный период и в виде матричных элементов в уравнениях (Б.7, Б.8). Тогда преобразуя все угловые интегралы в (Б.4), получаем три вида интегралов:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{q_1 q_2 q_3 q_4}{64\pi^5} \int_0^\infty \lambda^2 d\lambda \int \int e^{iq_1 \lambda \cos \theta_1} d\varphi_1 d \cos \theta_1 \\ &\times \int \int e^{iq_2 \lambda \cos \theta_2} d\varphi_2 d \cos \theta_2 \int \int e^{iq_3 \lambda \cos \theta_3} d\varphi_3 d \cos \theta_3 \int \int e^{iq_4 \lambda \cos \theta_4} d\varphi_4 d \cos \theta_4 \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \sin(q_1 \lambda) \sin(q_2 \lambda) \sin(q_3 \lambda) \sin(q_4 \lambda), \end{aligned} \quad (\text{Б.10})$$

$$\begin{aligned} D_2(3, 4) &= \frac{q_1 q_2 q_3^2 q_4^2}{64\pi^5} \int_0^\infty \lambda^2 d\lambda \int \int e^{iq_1 \lambda \cos \theta_1} d\varphi_1 d \cos \theta_1 \int \int e^{iq_2 \lambda \cos \theta_2} d\varphi_2 d \cos \theta_2 \\ &\times \int \int e^{iq_3 \lambda \cos \theta_3} \cos \theta_3 d\varphi_3 d \cos \theta_3 \int \int e^{iq_4 \lambda \cos \theta_4} \cos \theta_4 d\varphi_4 d \cos \theta_4 \\ &= \frac{4q_3 q_4}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \sin(q_1 \lambda) \sin(q_2 \lambda) \\ &\times \left[ \cos(q_3 \lambda) - \frac{\sin(q_3 \lambda)}{(q_3 \lambda)} \right] \left[ \cos(q_4 \lambda) - \frac{\sin(q_4 \lambda)}{(q_4 \lambda)} \right] \end{aligned} \quad (\text{Б.11})$$

и

$$\begin{aligned} D_3 &= \frac{(q_1 q_2 q_3 q_4)^2}{64\pi^5} \int_0^\infty \lambda^2 d\lambda \int \int e^{iq_1 \lambda \cos \theta_1} \cos \theta_1 d\varphi_1 d \cos \theta_1 \int \int e^{iq_2 \lambda \cos \theta_2} \cos \theta_2 d\varphi_2 d \cos \theta_2 \\ &\times \int \int e^{iq_3 \lambda \cos \theta_3} \cos \theta_3 d\varphi_3 d \cos \theta_3 \int \int e^{iq_4 \lambda \cos \theta_4} \cos \theta_4 d\varphi_4 d \cos \theta_4 \\ &= \frac{4q_1 q_2 q_3 q_4}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \left[ \cos(q_1 \lambda) - \frac{\sin(q_1 \lambda)}{(q_1 \lambda)} \right] \left[ \cos(q_2 \lambda) - \frac{\sin(q_2 \lambda)}{(q_2 \lambda)} \right] \\ &\times \left[ \cos(q_3 \lambda) - \frac{\sin(q_3 \lambda)}{(q_3 \lambda)} \right] \left[ \cos(q_4 \lambda) - \frac{\sin(q_4 \lambda)}{(q_4 \lambda)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{Б.12})$$

В случае, когда  $q_3$  или  $q_4$  во втором интеграле  $D_2$  соответствуют входящей частице и другой выходящей частице,  $D_2$  меняет знак на противоположный.

Для квадрата матричного элемента из уравнений (Б.7, Б.8) функцию  $D$  в (Б.6) можно переписать в виде:

$$D = K_1(E_1 E_2 E_3 E_4 D_1 + D_3 + E_1 E_2 D_2(3, 4) + E_3 E_4 D_2(1, 2)) \quad (\text{Б.13})$$

и

$$D = K_2 E_1 E_2 [E_3 E_4 D_1 + D_2(3, 4)]. \quad (\text{Б.14})$$

Рассмотрим случай, когда  $m_1^2 + m_2^2 = m_3^2 + m_4^2$ , левую часть уравнения (2.24) можно переписать как:

$$K_1(q_{1\mu} q_2^\mu)(q_{3\mu} q_4^\mu) = K_1(q_{3\mu} q_4^\mu)^2. \quad (\text{Б.15})$$

Правую часть уравнения (Б.15) можно проинтегрировать по углам. Тогда мы получим интегралы в виде уравнений (Б.10, Б.11) и еще один вид интеграла:

$$\begin{aligned} D_4(3, 4) &= \frac{q_1 q_2 (q_3 q_4)^3}{64\pi^5} \int_0^\infty \lambda^2 d\lambda \iint e^{iq_1 \lambda \cos \theta_1} d\varphi_1 d \cos \theta_1 \iint e^{iq_2 \lambda \cos \theta_2} d\varphi_2 d \cos \theta_2 \\ &\quad \times \iint e^{iq_3 \lambda \cos \theta_3} \cos^2 \theta_3 d\varphi_3 d \cos \theta_3 \iint e^{iq_4 \lambda \cos \theta_4} \cos^2 \theta_4 d\varphi_4 d \cos \theta_4 \\ &= \frac{4(q_3 q_4)^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \sin(q_1 \lambda) \sin(q_2 \lambda) \left[ \sin(q_3 \lambda) - \frac{2}{(q_3 \lambda)} \left( \cos(q_3 \lambda) - \frac{\sin(q_3 \lambda)}{(q_3 \lambda)} \right) \right] \\ &\quad \times \left[ \sin(q_3 \lambda) - \frac{2}{(q_3 \lambda)} \left( \cos(q_3 \lambda) - \frac{\sin(q_3 \lambda)}{(q_3 \lambda)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{Б.16})$$

Функции  $D_1$  и  $D_3$  симметричны относительно перестановок любых переменных и  $D_2$  симметрично при перестановке  $1 \leftrightarrow 2$  и  $3 \leftrightarrow 4$ . Далее для вычислений, мы будем использовать выражение для  $D_2(3, 4)$ . Найдем уравнения для  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$ . Преобразуем интеграл  $D_1$  уравнения (Б.10):

$$D_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \sin(q_4 \lambda)$$

$$\times [\sin((q_1 - q_2 + q_3)\lambda) + \sin((q_3 - q_1 + q_2)\lambda) - \sin((q_1 + q_2 + q_3)\lambda) + \sin((q_1 + q_2 - q_3)\lambda)].$$

Здесь мы получаем четыре табличных интеграла (Б.20).

Решим уравнение (Б.11) на  $D_2$ . Оно состоит из четырех интегралов. Второй и третий интеграл сначала берем по частям, четвертый - два раза по частям. Запишем конечный вид

интеграла после проделанных вычислений:

$$\begin{aligned}
D_2(3, 4) = & -\frac{2q_1q_3}{3\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \cos(q_1\lambda) \sin(q_2\lambda) \cos(q_3\lambda) \sin(q_4\lambda) \\
& -\frac{2q_2q_3}{3\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \sin(q_1\lambda) \cos(q_2\lambda) \cos(q_3\lambda) \sin(q_4\lambda) \\
& -\frac{2q_1q_4}{3\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \cos(q_1\lambda) \sin(q_2\lambda) \sin(q_3\lambda) \cos(q_4\lambda) \\
& -\frac{2q_2q_4}{3\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \sin(q_1\lambda) \cos(q_2\lambda) \sin(q_3\lambda) \cos(q_4\lambda) \\
& +\frac{4q_1q_2}{3\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \cos(q_1\lambda) \cos(q_2\lambda) \sin(q_3\lambda) \sin(q_4\lambda) \\
& +\frac{4q_3q_4}{3\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \sin(q_1\lambda) \sin(q_2\lambda) \cos(q_3\lambda) \cos(q_4\lambda) \\
& -\frac{2(q_1^2 + q_2^2 - 2q_3^2 - 2q_4^2)}{3\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \sin(q_1\lambda) \sin(q_2\lambda) \sin(q_3\lambda) \sin(q_4\lambda).
\end{aligned}$$

Для окончательного расчета интеграла  $D_2$  используем табличный интеграл (Б.20). Приведем к необходимому виду:

$$\begin{aligned}
D_2(3, 4) = & -\frac{1}{6\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \{q_1[\sin((q_1 + q_2)\lambda) - \sin((q_1 - q_2)\lambda)] \\
& +q_2[\sin((q_1 + q_2)\lambda) + \sin((q_1 - q_2)\lambda)]\} \\
& \times \{q_3[\sin((q_3 + q_4)\lambda) - \sin((q_3 - q_4)\lambda)] + q_4[\sin((q_3 + q_4)\lambda) + \sin((q_3 - q_4)\lambda)]\} \\
& +\frac{q_1q_2}{3\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} [\sin((q_1 + q_4)\lambda) - \sin((q_1 - q_4)\lambda)][\sin((q_2 + q_3)\lambda) + \sin((q_3 - q_2)\lambda)] \\
& +\frac{q_3q_4}{3\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} [\sin((q_1 + q_4)\lambda) + \sin((q_1 - q_4)\lambda)][\sin((q_2 + q_3)\lambda) - \sin((q_3 - q_2)\lambda)] \\
& -\frac{q_1^2 + q_2^2 - 2q_3^2 - 2q_4^2}{6\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \sin(q_4\lambda) \\
& \times [\sin((q_1 - q_2 + q_3)\lambda) + \sin((q_3 - q_1 + q_2)\lambda) - \sin((q_1 + q_2 + q_3)\lambda) + \sin((q_1 + q_2 - q_3)\lambda)].
\end{aligned}$$

Теперь перейдем к вычислению последнего интеграла (Б.12):

$$\begin{aligned}
D_3 = & -\frac{2(q_1^4 + q_2^4 + q_3^4 + q_4^4)}{15\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \sin(q_1\lambda) \sin(q_2\lambda) \sin(q_3\lambda) \sin(q_4\lambda) \\
& + \frac{8(q_1^2q_2^2 + q_1^2q_3^2 + q_1^2q_4^2 + q_2^2q_3^2 + q_2^2q_4^2 + q_3^2q_4^2)}{15\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \sin(q_1\lambda) \sin(q_2\lambda) \sin(q_3\lambda) \sin(q_4\lambda) \\
& - \frac{2(q_2^3q_3 + q_2q_3^3 - 2q_1^2q_2q_3 - 2q_2q_3q_4^2)}{15\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \sin(q_1\lambda) \cos(q_2\lambda) \cos(q_3\lambda) \sin(q_4\lambda) \\
& - \frac{2(q_1^3q_3 + q_1q_3^3 - 2q_1q_2^2q_3 - 2q_1q_3q_4^2)}{15\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \cos(q_1\lambda) \sin(q_2\lambda) \cos(q_3\lambda) \sin(q_4\lambda) \\
& - \frac{2(q_1q_2^3 + q_1^3q_2 - 2q_1q_2q_3^2 - 2q_1q_2q_4^2)}{15\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \cos(q_1\lambda) \cos(q_2\lambda) \sin(q_3\lambda) \sin(q_4\lambda) \\
& - \frac{2(q_3^3q_4 + q_3q_4^3 - 2q_1^2q_3q_4 - 2q_2^2q_3q_4)}{15\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \sin(q_1\lambda) \sin(q_2\lambda) \cos(q_3\lambda) \cos(q_4\lambda) \\
& - \frac{2(q_2^3q_4 + q_2q_4^3 - 2q_1^2q_2q_4 - 2q_2q_3^2q_4)}{15\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \sin(q_1\lambda) \cos(q_2\lambda) \sin(q_3\lambda) \cos(q_4\lambda) \\
& - \frac{2(q_1^3q_4 + q_1q_4^3 - 2q_1q_2^2q_4 - 2q_1q_3^2q_4)}{15\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \cos(q_1\lambda) \sin(q_2\lambda) \sin(q_3\lambda) \cos(q_4\lambda) \\
& + \frac{1}{5\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \cos(q_1\lambda) \cos(q_2\lambda) \cos(q_3\lambda) \cos(q_4\lambda).
\end{aligned}$$

Чтобы вычислить последнее слагаемое в интеграле  $D_3$ , возьмем его по частям:

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{5\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \cos(q_1\lambda) \cos(q_2\lambda) \cos(q_3\lambda) \cos(q_4\lambda) \\
& = \frac{1}{5\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} (q_1 + q_2) \sin((q_1 + q_2)\lambda) [\cos((q_3 + q_4)\lambda) + \cos((q_3 - q_4)\lambda)] \\
& + \frac{1}{5\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} (q_3 + q_4) \sin((q_3 + q_4)\lambda) [\cos((q_1 + q_2)\lambda) + \cos((q_1 - q_2)\lambda)] \\
& + \frac{1}{5\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} (q_3 - q_4) \sin((q_3 - q_4)\lambda) [\cos((q_1 + q_2)\lambda) + \cos((q_1 - q_2)\lambda)]
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{5\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} (q_1 - q_2) \sin((q_1 - q_2)\lambda) [\cos((q_3 + q_4)\lambda) + \cos((q_3 - q_4)\lambda)].$$

Для окончательного результата воспользуемся табличным интегралом (Б.21).

Для преобразования подынтегральных выражений применяли тригонометрические тождества:

$$\sin(mx) \sin(nx) = \frac{1}{2} [\cos(m - n)x - \cos(m + n)x], \quad (\text{Б.17})$$

$$\cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\cos(m + n)x + \cos(m - n)x] \quad (\text{Б.18})$$

и

$$\sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\sin(m + n)x + \sin(m - n)x]. \quad (\text{Б.19})$$

Для того чтобы получить окончательный результат от интегралов  $D_1$ ,  $D_2(3, 4)$  и  $D_3$  воспользуемся табличными определенными интегралами:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(px) \sin(qx)}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi p}{2}, & q \geq p > 0; \\ \frac{\pi q}{2}, & p \geq q > 0. \end{cases} \quad (\text{Б.20})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(px) \cos(qx)}{x} dx = \begin{cases} 0, & q > p > 0; \\ \frac{\pi}{2}, & p > q > 0; \\ \frac{\pi}{4}, & p = q > 0. \end{cases} \quad (\text{Б.21})$$

В общем случае, мы принимаем  $q_1 > q_2$  и  $q_3 > q_4$ . Тогда мы получаем четыре разных случая для  $D_1 - D_3$ , которые зависят от отношений между импульсами:

a)  $q_1 + q_2 > q_3 + q_4$  и  $q_1 + q_4 > q_2 + q_3$

$$D_1 = \frac{1}{2}(q_2 + q_3 + q_4 - q_1), \quad (\text{Б.22})$$

$$D_2(3, 4) = \frac{1}{12} [(q_1 - q_2)^3 + 2(q_3^3 + q_4^3) - 3(q_1 - q_2)(q_3^2 + q_4^2)], \quad (\text{Б.23})$$

$$D_3 = \frac{1}{60} [-q_3^5 + 5q_1^2 q_3^3 + 5q_2^2 q_3^3 + 5q_3^3 q_4^2 - 5q_1^3 q_3^2 - q_4^5 + 5q_1^2 q_4^3 + 5q_2^2 q_4^3 + 5q_3^2 q_4^3 - 5q_1^3 q_4^2 - q_2^5 + 5q_1^2 q_2^3 + 5q_2^3 q_3^2 + 5q_2^3 q_4^2 - 5q_1^3 q_2^2 + q_1^5]. \quad (\text{Б.24})$$

b)  $q_1 + q_2 > q_3 + q_4$  и  $q_1 + q_4 < q_2 + q_3$ ,

$$D_1 = q_4, \quad (\text{Б.25})$$

$$D_2(3, 4) = \frac{1}{3} q_4^3, \quad (\text{Б.26})$$

$$D_3 = \frac{1}{30} q_4^3 [-q_4^2 + 5q_1^2 + 5q_2^2 + 5q_3^2]. \quad (\text{Б.27})$$

Для случаев  $c$  и  $d$ , в интеграле  $D_1$ , в последнем слагаемом  $D_2(3, 4)$  и в первом слагаемом интеграла  $D_3$  делаем перестановку переменных  $4 \leftrightarrow 2$ .

$$c) \quad q_1 + q_2 < q_3 + q_4 \text{ и } q_1 + q_4 > q_2 + q_3,$$

$$D_1 = q_2, \tag{Б.28}$$

$$D_2(3, 4) = \frac{1}{12} [-(q_1 + q_2)^3 - 2(q_3^3 - q_4^3) + 3(q_1 + q_2)(q_3^2 + q_4^2)], \tag{Б.29}$$

$D_3$  такое же как уравнение (Б.34), но с изменением переменных  $1 \leftrightarrow 3$  и  $2 \leftrightarrow 4$ .

$$d) \quad q_1 + q_2 < q_3 + q_4 \text{ и } q_1 + q_4 < q_2 + q_3,$$

$$D_1 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2 + q_4 - q_3), \tag{Б.30}$$

$$D_2(3, 4) = \frac{1}{6}q_2[3q_3^2 + 3q_4^2 - 3q_1^2 - q_2^2], \tag{Б.31}$$

$$D_3 = \frac{1}{30}q_2^3[-q_2^2 + 5q_1^2 + 5q_3^2 + 5q_4^2]. \tag{Б.32}$$

Равенство двух походов требует выполнения двух условий:

$$D_2(1, 2) \equiv \frac{p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2}{2} D_1 + D_2(3, 4) \tag{Б.33}$$

и

$$D_3 \equiv \frac{p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2}{2} D_2(3, 4) + D_4(3, 4). \tag{Б.34}$$